

Uogólnione układy Calogero-Mosera-Sutherlanda, kwantyzacja, metody topologiczne i związki z kwantowym chaosem

Katarzyna Kowalczyk-Murynka

Streszczenie

Hamiltoniany Calogero-Mosera-Sutherlanda opisują jednowymiarowe układy wielu cząstek z oddziaływaniem proporcjonalnym do odwrotności kwadratu odległości. Można je uogólnić zastępując stałe sprężenia w wyrazach określających oddziaływanie dodatkowymi zmiennymi dynamicznymi, które zwykle nazywane są spinowymi lub wewnętrznymi stopniami swobody. Klasyczne, całkowalne N -ciałowe układy tego typu, z wewnętrznymi stopniami swobody rozpinającymi algebrę $\mathfrak{so}(N)$, $\mathfrak{su}(N)$ lub $\mathfrak{sp}(N)$, pojawiają się w zaskakująco innym kontekście, mianowicie odpychania poziomów energetycznych w chaotycznych układach kwantowych. Z drugiej strony, kwantowe modele Calogero-Mosera-Sutherlanda pojawiają się w obszarze topologicznej materii kwantowej, kwantowego Efektu Halla w szczególności. Ich funkcje własne otrzymuje się jako jednowymiarowe reprezentacje stanów Laughlina zrzutowanych na pojedynczy poziom Landaua.

Klasyczna dynamika wewnętrznych stopni swobody została w pewnym stopniu zbadana, ale jej szczegóły istotne dla problemu odpychania poziomów, takie jak istnienie dokładniejszej klasyfikacji modeli wewnątrz klasy ortogonalnej, unitarnej i symplektycznej, wciąż wymagają doprecyzowania. W przypadku kwantowym konkretne modele z wewnętrznymi stopniami swobody były badane, ale typowo tracą one tę wewnętrzną strukturę w granicy klasycznej. Modele, których spinowe stopnie swobody są w stanie przetrwać przejście do granicy klasycznej, wraz z ich potencjałem związanym z efektami topologicznymi, nie zostały dokładnie poznane.

Być może najbardziej niezwykłą cechą klasycznych układów Calogero-Mosera-Sutherlanda, wzięwszy pod uwagę oddziaływania i wewnętrzne stopnie swobody, jest ich zupełna całkowalność. Cecha ta jest bezpośrednią konsekwencją tego, że modele te otrzymuje się poprzez redukcję hamiltonowską bardzo prostego (np. swobodnego lub harmonicznego) ruchu w przestrzeni macierzy. Proces redukcji, choć można go zdefiniować formalnie w języku geometrii symplektycznej, sprowadza się w tym przypadku do diagonalizacji N -wymiarowej, zależnej od czasu macierzy $X(t)$, przypisania jej wartościom własnym roli położeń i eliminacji wektorów własnych z równań ruchu. Tak otrzymane funkcje określone w zredukowanej przestrzeni fazowej można skwantować kanonicznie według przepisu

Diraca. Z drugiej strony prosty układ w przestrzeni macierzy może zostać skwantowany, a następnie sparametryzowany przez wartości i wektory własne.

W ramach formalizmu hamiltonowskiego pokazałam, że macierzowe uogólnienie modelu Calogero-Mosera związane z algebrami Liego jest równoważne innemu, wektorowemu sformułowaniu, w którym wewnętrzny stan każdej cząstki opisany jest zespolonym wektorem. Wymiar podprzestrzeni rozpinanej przez te wektory (równoważny rzędowi macierzy z odpowiedniej algebry Liego) jest stałą ruchu, którą wykorzystałam do klasyfikacji modeli. Pokazałam, że modele z czysto urojonymi macierzami opisującymi wewnętrzne stopnie swobody w chwili początkowej mają specjalne własności: ich trajektorie w dobrym przybliżeniu opisują dynamikę modeli bez wewnętrznych stopni swobody ale z różnymi wartościami stałych sprzężenia, a także mają minimalne zbiory osiągalne. Dodatkowo, łącząc macierzowe i wektorowe stopnie swobody i przeprowadzając opisaną wcześniej redukcję otrzymałam nowy całkowalny model z oddziaływaniami zależnymi od odwrotności odległości między cząstkami. Poprzez kanoniczną kwantyzację układu z wewnętrznymi stopniami swobody i redukcję kwanowego układu swobodnego otrzymałam dwa różne hamiltoniany. Hamiltonian otrzymany z redukcji układu swobodnego posiada dodatkowy wyraz $-\frac{\hbar^2}{4m} \sum_{i < j} \frac{\alpha(2-\alpha)}{(x_i - x_j)^2}$ gdzie $\alpha = 1, 2$ odpowiednio w przypadku stopni swobody należących do algebry $\mathfrak{so}(N)$ lub $\mathfrak{su}(N)$. Wyraz ten wprowadza przyciąganie w modelu ortogonalnym. Zidentyfikowałam niektóre z nieprzywiedlnych reprezentacji algebry rozpinanej przez obserwable związane z wewnętrznymi stopniami swobody, wprowadzających do hamiltonianu macierze diagonalne, oraz znalazłam wartości i wektory własne w przypadku $N = 3$.

Klasyczne wyniki mogą zostać zastosowane w dalszych badaniach nad problemem dynamiki poziomów energetycznych. Spodziewany rozkład prawdopodobieństwa odległości między poziomami dla czysto urojonych macierzy różni się od tego, który odpowiada wszystkim macierzom należącym do algebry $\mathfrak{su}(N)$. Podobnie, można się spodziewać różnic w rozkładach w zależności od rzędu macierzy opisującej wewnętrzne stopnie swobody. Praca nad układami kwantowymi może być kontynuowana w dwóch głównych kierunkach: redukcja kwantowa może zostać wykonana w przypadku symplektycznym, oraz widma i funkcje własne mogą zostać znalezione (jeśli nie ściśle, to przynajmniej w przybliżeniu) dla większej liczby cząstek i większych wymiarów przestrzeni stanów wewnętrznych. Skończenie wymiarowa przestrzeń stanów wewnętrznych, po dokładnym zbadaniu, może posłużyć za dodatkowy wymiar, czyniąc cały układ dwuwymiarowym i podatnym na efekty topologiczne.

Oryginalne wyniki zaprezentowane w niniejszej rozprawie zostały opublikowane w następujących pracach:

- K. Kowalczyk-Murynka, M. Kuś. Matrix and vectorial generalized Calogero–Moser models. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 440: 133491, 2022
- K. Kowalczyk-Murynka, M. Kuś. Calogero-Moser models with internal degrees of freedom revisited, arXiv:2010.10215.