

Prof. dr hab. Andrzej Grudka
Wydział Fizyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
W Poznaniu

Poznań, 16 listopada 2022

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Subhayana Sarkara
pt. "Certification of entangled quantum states and quantum
measurements in Hilbert spaces of arbitrary dimension"**

Praca doktorska mgr. Subhayana Sarkara została napisana pod kierunkiem dr. hab. Adama Sawickiego prof. CTF PAN. Liczy ona 171 stron. Składa się na nią sześć rozdziałów i trzy dodatki. Wyniki zawarte w pracy zostały opublikowane w dwóch pracach w Physical Review A i npj Quantum Information oraz w dwóch pre-printach na arxiv.org.

Rozdział pierwszy jest krótkim wprowadzeniem. Autor omawia postulaty mechaniki kwantowej, ideę niezależnego od urządzeń certyfikowania (które jest głównym tematem pracy), a następnie zawartość poszczególnych rozdziałów pracy. Uważam, że wprowadzenie ładnie eksponuje główne wyniki i ułatwia dalsze czytanie pracy.

Rozdział drugi wprowadza podstawowe pojęcia matematyczne. Dwie pierwsze części tego rozdziału skupiają się na kwantowej teorii informacji, nielokalności Bella i kwantowym sterowaniu. Z wyjątkiem kwantowego sterowania odpowiednie pojęcia można znaleźć w standardowej książce z informatyki kwantowej (np. Nielsen i Chuang "Quantum Computation and Quantum Information"). Jednak włączenie ich do pracy uważam za uzasadnione, gdyż dzięki temu praca tworzy zamkniętą całość. W trzeciej części Autor omawia niezależne od urządzeń certyfikowanie stanów i pomiarów oraz losowości. Moim zdaniem Doktorant znakomicie przedstawił te pojęcia. Najpierw omówił je w prosty sposób, a następnie podał szczegółowe definicje. Ponadto zilustrował te pojęcia na prostych przykładach. Obliczenia zawierają wszystkie istotne szczegóły, dzięki czemu stanowią znakomity materiał dydaktyczny.

Rozdział trzeci jest pierwszym z trzech następujących po sobie rozdziałach, w których Autor prezentuje swoje oryginalne wyniki. Doktorant najpierw omawia dwie znane rodziny nierówności Bella, które wykorzystuje w dalszej części tego rozdziału. Są to nierówności SATWAP i ASTA. Następnie Autor udowadnia główne twierdzenie

(twierdzenie 3.1), które mówi, że jeżeli uczestnicy dokonując pomiarów osiągają maksymalne łamanie nierówności ASTA, to stan na którym otrzymano to łamanie może być za pomocą operacji unitarnych sprowadzony do uogólnionego stanu GHZ. Zaproponowane podejście jest nowatorskie w porównaniu do wcześniej zaproponowanego opartego na pomiarach na dwuwymiarowych podprzestrzeniach między dwoma uczestnikami. Autor pokazuje ponadto, w jaki sposób zaproponowany protokół może być użyty do generowania losowości. Otrzymane w tym rozdziale wyniki uważam za bardzo interesujące. Mam jedną drobną uwagę krytyczną do tego rozdziału. Na stronie 56 Doktorant pisze "First, we show that the Hilbert space of first party can be written as a direct sum of d -dimensional Heilbert space, that is...". Niestety nie jest to zgodne ze wzorem (3.45), w którym mamy iloczyn tensorowy.

W rozdziale czwartym Autor rozważa certyfikowanie pomiarów kwantowych. Na początku omawia ważne pojęcia jakimi są nierówności dla kwantowego sterowania i obserwabla prawdziwie niekompatybilne. Następnie przechodzi do udowodnienia dwóch twierdzeń, które są nowymi wynikami uzyskanymi przez Niego. Pierwszym z nich jest twierdzenie 4.1, które mówi, że jeżeli jest spełniona nierówność (4.34) dla sterowania to odpowiednie pomiary są certyfikowane. Drugie twierdzenie (twierdzenie 4.2) mówi nam, na ile bliski jest stan, na którym wykonujemy pomiary, pewnemu zadanemu stanowi oraz na ile bliskie są obserwabla pewnym zadanym obserwablom, jeżeli nierówność dla kwantowego sterowania nie jest łamana maksymalnie, a jedynie znamy dolne ograniczenie na jej łamanie. Zwłaszcza to twierdzenie uważam za ważny wynik, ponieważ odpowiada ono sytuacji, z którą mamy do czynienia podczas wykonywania eksperymentów.

W rozdziale piątym Autor rozważa kilka zagadnień. Najpierw podaje nowe nierówności dla kwantowego sterowania i znajduje ich klasyczne i kwantowe (twierdzenie 5.1) ograniczenia. Nierówności te wykorzystuje do pokazania, jak można certyfikować wszystkie czyste dwucząstkowe stany splątane (twierdzenie 5.2) oraz ekstremalne operatory POVM pierwszego rzędu (twierdzenie 5.3). Najciekawszym rezultatem jest moim zdaniem zastosowanie tych wyników do certyfikowania losowości. Po pierwsze ma to zastosowanie praktyczne. Po drugie pozwoliło to odpowiedzieć pozytywnie na długo otwarte pytanie, czy możliwe jest bezpieczne generowanie optymalnej ilości losowości. Rozdział szósty jest krótkim podsumowaniem rozprawy.

Moim zdaniem Doktorant otrzymał wiele ciekawych wyników. Autor nie tylko rozważył idealne sytuacje, ale otrzymał wyniki dla przypadków nieidealnych, które występują w eksperymencie. Ponadto udało mu się rozwiązać długo otwarty problem.

Chciałbym jeszcze zwrócić uwagę na prezentację tych wyników. Moim zdaniem jest ona znakomita. Autor najpierw na prostych przykładach wprowadza czytelnika w tematykę, a następnie przedstawia wyniki swoich obliczeń. Obliczenia są przedstawione z wszystkimi szczegółami. Po obliczeniach Doktorant podsumowuje wyniki i wyraźnie pokazuje, jak Jego badania odnoszą się do badań innych autorów .

W związku z powyższym stwierdzam, że przedstawiona mi do recenzji rozprawa spełnia wszystkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszej części postępowania.

Andrzej Grudka