

Wrocław, 16 października 2022

Prof. dr hab. Andrzej Borowiec
Uniwersytet Wrocławski
Instytut Fizyki Teoretycznej
Pl. Maksa Borna 9, 50-204 Wrocław

Recenzja rozprawy doktorskiej magister Katarzyny Senger

Nowe zasady wariacyjne w Ogólnej Teorii Względności

i ich związku z zasadą Hilberta

Opiekun naukowy: prof. dr hab. Jerzy Kijowski

Zasady wariacyjne i rachunek wariacyjny odgrywają centralną rolę w wielu działach współczesnej fizyki, od czasów zasady najmniejszego działania Pierra de Fermat. Prowadzą one do praw zachowania poprzez twierdzenia Emmy Noether. W szczególności, można badać klasy teorii, połączone wspólną geometryczną zasadą konstrukcji. W przedstawionej rozprawie jest to zależność działania od wyższych pochodnych kowariantnych tensora krzywizny riemannowskiej. Jedynymi zmiennymi dynamicznymi są tu symetryczna (beztorsyjna) koneksja i pola materii. W przeciwieństwie do standardowego podejścia, równania ruchu Eulera-Lagrange'a generowane są z członu brzegowego, odpowiedzialnego również za prawa zachowania. Odpowiada to hamiltonowskiej zasadzie wariacyjnej i formalizmowi kanonicznemu ze strukturą symplektyczną. Kluczowym elementem jest możliwość wprowadzenia symetrycznych kanonicznych pędów. Należy zaznaczyć, że zasady wariacyjne i formalizm kanoniczny są od lata aktualnym przedmiotem działalności naukowej promotora. Wiele wersji twierdzenia o uniwersalności równań Einsteina zostało wcześniej opublikowane. Motywacja fizyczna jest wspólna dla wielu rodzajów zmodyfikowanych (rozszerzonych) teorii grawitacji: opisać kosmologiczną ciemną energię i międzygalaktyczną ciemną materię za pomocą dodatkowych pól otrzymanych poprzez redukcję rozszerzonych teorii do układu Einsteina z nowym zestawem „matematycznych pól materii”.

Koneksję afiniczną można zdefiniować jako koneksję główną w wiązce reperów liniowych (afinicznych) danej rozmaitości. Takie podejście czyni teorię koneksji podobną do pól Yanga-Millsa z grupą cechowania $GL(n)$. Podklasa koneksji symetrycznych nie może być opisana, w analogi do przypadku metrycznego jako redukcja do odpowiedniej podgrupy struktury. Inna definicja koneksji liniowej jest poprzez operację kowariantnego różniczkowania. Najbliższe metodologii rozwiniętej w pracy jest rozumienie koneksji jako obiektu geometrycznego rzędu drugiego, zdefiniowanego poprzez lokalne i nieliniowe prawo transformacji przy zmianie współrzędnych. Tak określona koneksja staje się cięciem odpowiedniej naturalnej, afinicznej wiązki włóknistej, której konstrukcja jest znana w literaturze, np. M. Ferraris, M. Francaviglia, C. Reina "A constructive approach to bundles of geometric objects on a differentiable manifolds", JMP 24, 120 (1983). Wiązka ta jest stowarzyszona z wiązką główną reperów rzędu dwa. Znana jest również konstrukcja dżetowych rozszerzeń takiej wiązki. Intencją autorki jest, posługiwanie się językiem zrozumiałym dla fizyków, jak np. inercjalne

układy odniesienia niż terminologią ściśle matematyczną. (Zestaw pojęciowy i terminologia matematyczna w tej dziedzinie są ściśle określone.)

Praca, oparta jest na rozwinięciu pomysłu promotora (porównaj [8]), który wykazał, że wartość symetrycznej koneksji oraz zsymetryzowanych (po wszystkich indeksach) pochodnych cząstkowych można wyzerować w dowolnym punkcie rozmaitości poprzez odpowiedni wybór lokalnych współrzędnych, tzw. współrzędnych inercjalnych rzędu jeden. Fakt ten pozwala na redefinicję tensora krzywizny, który w takich współrzędnych (i w danym punkcie) przyjmuje prostą postać pochodnej cząstkowej współczynników koneksji. Nowy tensor krzywizny okazuje się być odwracalną kombinacją liniową powszechnie używanego tensora krzywizny Riemanna. Rozwinięcie tego pomysłu do wyższych rzędów w pochodnych cząstkowych jest przedmiotem pierwszej części rozprawy [10]. Druga część to zastosowanie nowego formalizmu do dowodu twierdzenia o uniwersalności [9].

Rozprawa ma formę autoreferatu, który składa się z wprowadzenia, czterech krótkich rozdziałów, bibliografii oraz dołączonych publikacji [10,9], stanowiących odpowiednio rozdziały nr 6 i 7. Brak jest zakończenia zawierającego konkluzje.

Rozdział drugi „Zasady wariacyjnej wyższych rzędów w teorii grawitacji” opisuje, jak można z działania z wyższymi pochodnymi przejść, poprzez proces redukcji, do działania rzędu niższego kosztem wprowadzenia „matematycznych pól materii”. Użyto formalizmu rzędu pierwszego (hamiltonowskiego) z wykorzystaniem członów brzegowych. Warto przypomnieć, że człon brzegowy służy również do uzyskania praw zachowania. Zastosowanie tego formalizmu do przypadku lagrangianów zależnych od pochodnych tensora krzywizna oraz dowodu twierdzenia o uniwersalności jest omówione w rozdziale 5 „Niezniennicza redukcja rzędu teorii” (streszczenie pracy [9]). Rozdział 3 „Teoria krzywizny” traktuje, w pierwszym podrozdziale, o symetrycznej koneksji afinicznej w ujęciu dżetowych rozszerzeń. Wprowadza lokalnie inercjalne układy współrzędnych rzędu k (a w zasadzie ich klasy równoważności), zerujące (w danym punkcie) wszystkie zsymetryzowane pochodne cząstkowe współczynników koneksji do rzędu k włącznie. Podrozdział drugi przypomina definicję wspomnianego wyżej zmodyfikowanego tensora krzywizny. Rozdział czwarty „Tensory krzywizny wyższych rzędów”, omawiający wyniki publikacji [10], wprowadza współrzędne w dżetowym rozszerzeniu symetrycznej koneksji za pomocą tensorów krzywizny wyższych rzędów zdefiniowanych w specjalnych układach odniesienia. Główną część stanowi twierdzenie o wyrażeniu pochodnych kowariantnych rzędu k tensora krzywizny za pomocą wprowadzonych wcześniej krzywizn wyższych rzędów. Ta część pracy wymagała pokonania największych trudności technicznych, aby otrzymać jawne zależności pomiędzy krzywiznami wyższych rzędów a kowariantnymi pochodnymi tensora krzywizny z uwzględnieniem tożsamości Bianchi. Można wywnioskować, że doktorantka dobrze się wywiązała z tego zadania.

Bibliografia jest bardzo skromna. Widoczny brak odsyłaczy do matematycznej literatury, w której wiele podobnych problemu zostało wcześniej przedstawionych. Przykładem są dostępne w języku polskim „*Rachunek Tensorowy*” Stanisława Gołąba, czy bardziej współczesny podręcznik „*Geometria różniczkowa*” Jacka Gancarzewicza. Należy dodać, że krakowska szkoła geometrii różniczkowej wniosła swój wkład do teorii obiektów geometrycznych, uformowanej później w rozprawie doktorskiej Alberta Nijenhuis’a z 1952 roku.

Rozważania prowadzone są na bardzo ogólnym poziomie. Brak ilustrujących nietrywialnych przykładów, jest zapewne spowodowany trudnościami w konstrukcji gęstości skalarnej (lagrangianu) z samej symetrycznej koneksji, bez metryki jak formalizmie Palatiniego. Zwykle używa się do tego celu pierwiastka z wyznacznika metryki pomnożonego przez skalar. Tu można by go ewentualnie zastąpić przez pierwiastek tensora Ricciiego (a raczej jego symetrycznej części). Skalarny konkomitant wymaga z kolei zwięźania indeksów kontrawariantnych z kowariantnymi, co może być trudne bez metryki. Podobny problem był badany dla działania zależnego od pochodnych skalaru Ricciiego w pracach R.R. Cuzinatto, et al. Phys. Rev. D93, 084053 (2016), Phys. Rev. D99, 084053 (2019).

Podstawą doktoratu są dwie prace [9,10] opublikowane w bardzo dobrych czasopismach o profilu fizyki-matematycznej, stanowiące część rozprawy. Pomimo uwag krytycznych i raczej spodziewanego wyniku uważam, że prace te wnoszą cenny wkład do dziedziny, stanowiąc ciekawe uzupełnienie badanych do tej pory przypadków. W szczególności prowadzą do rozwoju nowych technik rachunku wariacyjnego oraz bliższego intuicji fizyka podejścia (również o walorach dydaktycznych) do zagadnienia symetrycznej koneksji w geometrii różniczkowej.

Uwzględniając powyższe stwierdzam, że przedstawiona mi do recenzji rozprawa spełnia wszystkie wymagania ustawowe (Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce Dz. U. z 2020 r. poz.85 z późn. zm.) i zwyczajowe stawiane rozprawą doktorską i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszej części postępowania.

Borowiec