

dr hab. Rafał Demkowicz-Dobrzański, prof. ucz.

Instytut Fizyki Teoretycznej

Wydział Fizyki UW

ul. Pasteura 5, 02-093 Warszawa

demko@fuw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Lorenzo Mattioli, p.t. „Quantum Universality and Membership Problems”

Rozprawa doktorska mgra Lorenzo Mattioli dotyczy poszukiwania prostych kryteriów algebraicznych pozwalających na stwierdzenie, czy dany zestaw bramek kwantowych (zbiór operacji unitarnych) pozwala na skonstruowanie, z dowolnie dobrą dokładnością, dowolnej operacji unitarnej nad daną przestrzenią (*problem uniwersalności* – ang. universality problem), oraz czy dana operacja może zostać przybliżona z dowolnie dobrą dokładnością poprzez składanie operacji należących do danego zbioru (*problem należenia* – ang. membership problem). Są to fundamentalne zagadnienia teoretyczne leżące u podstaw całej dziedziny obliczeń kwantowych.

Wyniki

Autor rozpoczyna rozprawę od przedstawienia motywacji badań, podkreślenia wagi problemu uniwersalności bramek kwantowych, przedstawienia znanych wyników oraz streszczenia głównych wyników pracy.

Następnie przystępuje do niezwykle drobiazgowego i pedagogicznego wprowadzenia wszystkich pojęć matematycznych potrzebnych do zrozumienia głównych twierdzeń pracy dotyczących grup i algebr Liego. Najważniejszym pojęciem, które jest kluczowe w sformułowanych i udowodnionych przez autora twierdzeniach jest pojęcie centralizatora danego zbioru elementów algebry Liego, czyli takiego zbioru elementów algebry Liego, które komutują z wszystkimi elementami danego zbioru.

Oryginalne wyniki pojawiają się w Rozdziałach 5,7,8. Autor najpierw skupia się na problemie uniwersalności i należenia w kontekście ogólnych algebr Liego (rozdział 5) aby w kolejnych rozdziałach przejść do analizy problemu dla grup Liego i w szczególności dla grupy $SU(d)$ (rozdziały 7,8), co odpowiada oryginalnej motywacji badania uniwersalności i problemu należenia w kontekście bramek kwantowych.

W Rozdziale 5, autor wprowadza pojęcie pomocniczego operatora rzutowego danego podzbioru algebry Liego (auxiliary projector), który jest bezpośrednio powiązany z pojęciem centralizatora (obraz operatora rzutowego pokrywa się z centralizatorem). Dzięki temu autor jest w stanie podać konieczne i dostateczne warunki dla *problemu należenia* dla elementów algebr Liego (Twierdzenie 5). Warunki są wyrażone z jednej strony poprzez równość centralizatorów obrazu działania dołączonego na odpowiednie zbiory elementów algebry Liego i równość wymiarów przestrzeni rozpiętej przez elementy uzyskane przez działanie rzutowego operatora pomocniczego na elementy zbiorów. Bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 5 jest Twierdzenie 6 formułujące konieczne i dostateczne warunki dla uniwersalności danego zbioru elementów algebry Liego.

W Rozdziale 7 autor prezentuje wyniki dotyczące grupy $SU(d)$. Twierdzenie 11 podaje warunki konieczne i dostateczne na uniwersalność danego podzbioru grupy $SU(d)$. Twierdzenie to poza warunkiem wykorzystującym pojęcie centralizatora reprezentacji dołączonej wykorzystuje dodatkowo

pojęcie uogólnionego centrum grupy $SU(d)$. Autor wskazuje na niedoskonałość takiego rozwiązania problemu uniwersalności zarówno od strony praktycznej (numerycznej złożoności sprawdzenia warunków) jak i estetycznej (wykorzystanie nienaturalnych struktur matematycznych). To prowadzi do najważniejszego wyniku pracy czyli Twierdzenia 13, w którym autor podaje konieczne i dostateczne warunki na uniwersalność danego podzbioru $SU(d)$ w oparciu jedynie o pojęcie centralizatora obliczonego jednak nie na reprezentacji dołączonej, a na odpowiednio skonstruowanej reprezentacji tensorowej grupy $SU(d)$. W dalszej części pracy autor bardziej szczegółowo prezentuje konsekwencje twierdzenia i pokazuje również wnioski jakie można wyciągnąć odnośnie efektywności przybliżania dowolnych operacji unitarnych przez operacje z danego podzbioru $SU(d)$.

W ostatnim rozdziale 8 autor analizuje problem należenia dla grupy $SU(d)$ i pokazuje, że w odróżnieniu od przypadku algebr Liego w tym przypadku nie wydaje się możliwe znalezienie prostego koniecznego i dostatecznego warunku rozwiązującego ten problem w pełnej ogólności.

Ocena i uwagi krytyczne

Pierwsze co rzuca się w pracy to jej wybitnie matematyczny charakter. Ma to zarówno dobre jak i złe strony. Czytając pracę, można faktycznie docenić wyjątkową elegancję głównego wyniku autora (Twierdzenia 13), gdyż autor w niezwykle drobiazgowy sposób prowadzi czytelnika od najbardziej elementarnych pojęć, aż do najbardziej zaawansowanych twierdzeń. Doceniając elegancję prezentacji, nie sposób jednak nie zauważyć, że bardzo brakuje w pracy odniesień do zagadnień fizycznych. W zasadzie poza wstępnym rozdziałem, gdzie takie odniesienia się pojawiają, brakuje zastosowań uzyskanych wyników w fizycznych modelach obliczeń kwantowych. Wiemy, że dla zagadnienia bramek qubitowych uzyskane wyniki raczej nie będą prowadzić to jakiś nowych zaskakujących obserwacji. Nie mniej istnieją platformy obliczeń kwantowych gdzie w naturalny sposób elementarne bramki nie mają charakteru qubitowego. Przykładem mogą być obliczenia na platformach optycznych, wykorzystujące elementy liniowej i nieliniowej optyki do przeprowadzania obliczeń kwantowych. Wiadomo np. że aby móc wykonywać dowolne obliczenia wykorzystując takie platformy, poza elementami liniowe optyki potrzebna jest nieliniowa bramka np. non-linear phase shift gate. Bramkę taką np. w schemacie KLM realizuje się wykorzystując trzy mody optyczne. Zastanawiam się, czy uzyskane w tej rozprawie wyniki mogłyby coś nietrywialnego powiedzieć o problemie uniwersalności w tego typu paradygmacie obliczeń. Innym przykładem, mogłyby być modele obliczeń na pułapkowanych jonach wykorzystujących więcej niż dwa poziomy energetyczne dla zapisu informacji, lub niestandardowe pomysły na kodowanie stanów logicznych w układach nadprzewodzących, obecnie najpowszechniej wykorzystywanych jako platformy dla obliczeń kwantowych.

Ponadto, w pracy bardzo by się przydało więcej przykładów zastosowania twierdzenia do konkretnych zestawów bramek, nawet bez odniesień do konkretnych realizacji fizycznych, aby pokazać praktyczne użycie twierdzenia i wskazać na nietrywialne wyniki jakie dzięki niemu można uzyskać. Wobec braku takich przykładów czytelnik, może zachwycać się nad elegancją twierdzenia ale pozostaje niedosyt odnośnie praktycznej wartości tego twierdzenia i siły potencjalnie uzyskanych dzięki niemu wyników.

Praca jak na rozprawę doktorską nie jest zbyt obszerna, co jednak z uwagi na jej bardzo matematyczny charakter ma uzasadnienie, gdyż każda strona jest „gęsta” od rozumowań matematycznych. Nie mniej wydaje się, że skromna bibliografia (25 pozycji) nie oddaje chyba całego zakresu prac dotyczącego tego problemu, a jeśli nawet zawiera wszystkie istotne prace z punktu widzenia zaprezentowanych wyników, to jednak warto by dać czytelnikowi nieco szerszą perspektywę na dziedzinę obliczeń kwantowych, również z bardziej fizycznego punktu widzenia – choćby wspomnieć o dzisiejszym

rozwoju komputerów kwantowych i perspektyw realizacji uniwersalnego komputera kwantowego używając różnych platform fizycznych.

Doceniam również, dbałość autora o jak najjaśniejsze i pedagogiczne wprowadzenie większość niezbędnych pojęć, choć kilka z nich jednak pojawiło się *implicite* bez podania definicji: ideał, rozwiązywalność algebry, czy działanie dołączone. Są to może standardowe pojęcia w teorii algebr Liego, ale w sytuacji gdy większość znacznie bardziej elementarnych pojęć była wprowadzana jawnie, nie jest do końca jasne dlaczego te pojęcia również nie zostały jawnie zdefiniowane. Ponadto, przy okazji pewnych definicji, takich jak np. rzutowego operatora pomocniczego brakowało też prostych przykładów ilustrujących własności wprowadzonego pojęcia.

Podsumowanie.

Praca zachwyca elegancją matematyczną i dowodzi niezwyklej biegłości autora w poruszaniu się w tematyce algebr i grup Liego. W pełni podzielam zdanie autora odnośnie Twierdzenia 13, którego niezwyklej elegancja jest faktycznie zaskakująca. Jako, że jednak jest to rozprawa z dyscypliny nauk fizycznych, duży niedosyt pozostawia bardzo skromny zakres odniesień do zagadnień fizycznych, a w szczególności sugestii platform obliczeń kwantowych, gdzie w naturalny sposób pojawiają się elementarne bramki na przestrzeniach większych niż dwuwymiarowe i gdzie uzyskane twierdzenia mogłyby mieć bezpośrednie przełożenie na pewne praktyczne stwierdzenia dotyczące zestawów bramek kwantowych gwarantujących efektywną uniwersalność obliczeń kwantowych.

Mimo tej uwagi krytycznej, uważam że przedstawiona mi do recenzji rozprawa spełnia wszystkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszej części postępowania.