

Prof. dr hab. Andrzej Grudka
Wydział Fizyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
W Poznaniu

Poznań, 27 czerwca 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Lorenzo Mattioli pt. "Quantum Universality and Membership Problems"

Praca doktorska mgr. Lorenzo Mattioli została napisana pod kierunkiem dr. hab. Adama Sawickiego prof. CTF PAN. Liczy ona 100 stron. Składa się na nią dziewięć rozdziałów i trzy dodatki.

Rozdział 1 pełni rodzaj wstępu. Autor przedstawił w nim podstawowe informacje na temat bramek qubitowych. Wyjaśnia On, co to są bramki uniwersalne oraz wspomina algorytm Solovaya-Kitaeva, który pozwala na przybliżanie dowolnej bramki kwantowej za pomocą kilku bramek kwantowych. Wprowadzenie to pozwala umiejscowić Doktorantowi swoje badania we właściwym kontekście badań. Następnie Autor pokrótce przedstawia strukturę pracy oraz spis najważniejszych rezultatów, które otrzymał. Uważam, że to przedstawienie ułatwia dalszą lekturę pracy. W następnych trzech rozdziałach i w rozdziale 6 Doktorant skupia się na sformułowaniu problemu i narzędziach matematycznych, które posłużą mu do udowodnienia twierdzeń o przynależności i uniwersalności.

W rozdziale 2 Autor najpierw skupia się on na algebrze liniowej. Dowodzi On własności podprzestrzeni wektorowych i operatorów liniowych. Następnie wprowadza wektoryzację macierzy. W dalszej części definiuje normę operatorową i normę Frobeniusa oraz dowodzi pewnych nierówności dla tych norm. Przedstawia też kilka własności operatorów liniowych. W ostatniej części Autor skupia się na grupach. Wprowadza pojęcia centralizatora, centrum, komutatora grupowego, słów i alfabetu i dowodzi lematy ich dotyczące. Podobało mi się w tym rozdziale to, że Autor zilustrował wprowadzone pojęcia i własności dwoma przykładami, które ułatwiają lekturę.

Rozdział 3 poświęcony jest algebrze Liego. Autor definiuje normalizator, centralizator i podalgebrę generowaną, a następnie dowodzi ich własności. Mam jedno

pytanie dotyczące wielkości występującej w tym rozdziale. Co oznacza w lemacie 21 X prostopadłe? Dobrze byłoby też wyjaśnić, czym jest forma Killinga. Na końcu rozdziału Autor przedstawia problemy, które będzie rozważał. Główny problem jest sformułowany na stronie 28 i brzmi: "Mając dane dwa podzbiory algebry Liego zdecyduj, czy podalgebry generowane przez nie są takie same bez jawnego obliczania ich." Autor następnie wyjaśnia w jaki sposób problem ten łączy się z problemami o przynależności i o uniwersalności.

Rozdział 4 dotyczy algebr redukcyjnych i algebr zwartych. Tak jak poprzednio Autor definiuje odpowiednie pojęcia, a następnie dowodzi różnych lematów dotyczących ich własności. Moim zdaniem rozdział ten zyskałby, gdyby Autor zdefiniował pewne pojęcia, których używa. W definicji 12 przydałoby się wyjaśnić, co to jest ideał rozwiązywalny i nilpotentny. W lemacie 33 dobrze byłoby zdefiniować g prostopadłe.

Rozdział 5 stanowi jeden z najważniejszych rozdziałów pracy. Najpierw Autor wprowadza nowe narzędzie w postaci tzw. pomocniczych operatorów rzutowych. Następnie dowodzi dwóch twierdzeń. Są to twierdzenie o przynależności i twierdzenie o uniwersalności. Same rezultaty uważam za ważne i ciekawe. Niestety brakuje mi komentarza dotyczącego tych rezultatów. Przydałoby się w prosty sposób wyjaśnić treść tych twierdzeń. Częściowo jest to co prawda zrobione w rozdziale 1 na stronie 4. Nie zaszkodziłoby jednak rozwinąć to wyjaśnienie w obecnym rozdziale. Poza tym chętnie bym zobaczył, w jaki sposób twierdzenia te łączą się z rzeczywistymi problemami fizycznymi.

Rozdział 6 dotyczy grup Liego. Po udowodnieniu kilku lematów Autor formułuje na stronie 52 problem dla grup Liego, który brzmi "Mając dane dwa podzbiory grupy Liego zdecyduj, czy podzbiory generowane przez nie są takie same bez jawnego obliczania ich." Podobnie jak w rozdziale 3 Autor wyjaśnia w jaki sposób problem ten łączy się z problemami o przynależności i o uniwersalności.

Rozdział 7 jest drugim z najważniejszych rozdziałów pracy. Autor wprowadza dwa narzędzia, którymi są pomocnicze podalgebry oraz uogólnione centum oraz dowodzi kilku lematów dotyczących ich własności. Następnie przedstawia główne rezultaty. Są to twierdzenia o uniwersalności dla grup Liego $SU(d)$. Uważam te wyniki za ważne i interesujące. W jednym przypadku Autor pokusił się o zilustrowanie twierdzenia przykładem, co ułatwia jego zrozumienie. W tym rozdziale Doktorant opatrzył twierdzenia stosownym komentarzem.

W podziale 8 Autor dowodzi twierdzeń dla problemu o uniwersalności dla podgrupy i dla problemu o przynależności (z dodatkowymi założeniami). Niestety twierdzenia te są pozbawione komentarza.

Autor bez wątpienia opanował zaawansowane techniki matematyczne i rozwiązał przy ich pomocy interesujące problemy. Natomiast prezentacja wyników mogłaby być lepsza. Przydałoby się więcej komentarzy oraz odniesienie do rzeczywistej sytuacji fizycznej. Chętnie bym zobaczył też większą liczbę przykładów ilustrujących poruszane zagadnienia. Bez nich przedstawiony formalizm wydaje się bardzo abstrakcyjny. Moje komentarze krytyczne nie mają charakteru zasadniczego i nie dotyczą wartości otrzymanych wyników.

Podsumowując, stwierdzam, że przedstawiona mi do recenzji rozprawa spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o dopuszczenie jej Autora do dalszych części postępowania.

Andrzej Grudka