

prof. dr hab. Jacek Jezierski
Katedra Metod Matematycznych Fizyki
ul. Pasteura 5, 02-093 Warszawa

Opinia promotora o rozprawie magistra Piotra Waluka

„On the problem of quasi-local mass in the weak field regime of gravity”

Mgr Piotr Waluk prowadzi we współpracy ze mną badania nad zagadnieniem energii dla pola grawitacyjnego w ramach Ogólnej Teorii Względności. Przedstawiona rozprawa doktorska jest efektem tej współpracy. Temat pracy jest ściśle związany z problemem definicji tzw. masy kwazilokalnej oraz jej interpretacji fizycznej, a także związku między pełną nieliniową teorią (opisaną równaniami Einsteina) a teorią zlinearyzowaną, w której można opisywać energię w sposób niezależny od cechowania. Rozprawa zawiera też kilka interesujących wyników wykraczających poza ten problem.

W rozdziale pierwszym omówiono krótko najważniejsze struktury matematyczne, które są wykorzystywane w dalszej części rozprawy.

W rozdziale drugim autor omawia niektóre trudności związane z pojęciem energii w OTW, wprowadza klasyczne pojęcie masy ADM, która opisuje globalną energię pola grawitacyjnego. Podaje również całkowicie nowy dowód dodatniości energii.

Dalej następuje opis aparatu matematycznego stosowanego w próbach zdefiniowania masy kwazilokalnej. Szczególną uwagę poświęcono zagadnieniu warunków brzegowych, te bowiem zdają się pełnić kluczową rolę w całym procesie. Ich funkcja jest podwójna. Z jednej strony poprzez warunki brzegowe kontrolowana jest interakcja badanego obszaru z resztą czasoprzestrzeni. Z drugiej — mogą one posłużyć do określenia układu odniesienia, niezbędnego by w ogóle nadać sens pojęciu energii. Dla zobrazowania tych rozważań podane jest kilka przykładów proponowanych konstrukcji kwazilokalnych mas.

W następnej kolejności omówiono zlinearyzowaną teorię grawitacji. W takim przybliżeniu ogólnej teorii względności zagadnienie energii zostało już dobrze zrozumiane i możliwe jest uzyskanie jawnego, kanonicznego wyrażenia na Hamiltonian, poprzez konstrukcję z formy symplektycznej. Prezentację tę upraszcza formalizm zredukowanych stopni swobody, które zostały uogólnione przez autora na przypadek metryki Kottlera.

W naturalny sposób oczekiwać można, że wyrażenie na kwazilokalną masę w pełnej teorii grawitacji przybliżane będzie przez Hamiltonian zlinearyzowanej teorii. W szczególności, własność tę posiada globalna masa ADM. W końcowej części pracy zastosowano to kryterium do kwazilokalnej masy Hawkinga. W ramach najnowszych wyników badań autorowi udało się wykazać, że istotnie jest ona przybliżana przez wyrażenie energetyczne liniowej teorii, przy spełnieniu pewnego dodatkowego zestawu warunków. Część z nich interpretować można jako przybliżenie tzw. warunków „sfer sztywnych” — równań wyróżniających w ogólnej czasoprzestrzeni rodzinę topologicznych sfer o kształcie zbliżonym do okrągłych sfer w czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Rozprawa zawiera również aż sześć pożytecznych dodatków: pierwszy (A) stanowi techniczne uzupełnienie rozdziału pierwszego, drugi (B) zawiera przydatne wzory do sprawdzenia poprawności rachunków związanych z perturbacjami metryki, trzeci (C) to kluczowy rachunek uzupełniający rozdział piąty, czwarty dodatek (D) zawiera skomplikowaną technicznie redukcję formy symplektycznej, piąty dodatek (E) podaje użyteczne tożsamości całkowo-różniczkowe na sferze dwuwymiarowej wykorzystywane intensywnie w rozprawie, ostatni (F) zawiera zlinearyzowane równania Einsteina wraz z transformacjami cechowania.

Ponadto tradycyjnie na końcu jest zamieszczony spis literatury, który dodatkowo jest poprzedzony bardzo przydatnym spisem oznaczeń (G).

Oryginalne rezultaty omówione w rozprawie zostały częściowo opublikowane w pracach:

- P. Waluk, J. Jezierski, *Proof of Positive Energy Theorem by spacetime foliations*, Banach Center Publications 110, 115–120 (2016);
- P. Waluk, J. Jezierski, *Degrees of Freedom of Weak Gravitational Field on a Spherically Symmetric Background*, Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement 10, 391–395 (2017);
- P. Waluk, J. Jezierski, *Gauge-invariant description of weak gravitational field on a spherically symmetric background with cosmological constant*, Class. Quantum Grav. 36, 215006 (2019);
- J. Jezierski, J. Kijowski, P. Waluk, *Gauge-invariant quadratic approximation of quasi-local mass and its relation with Hamiltonian for gravitational field*, Class. Quantum Grav. 38, 095006 (2021).

Wyniki te były również referowane na konferencjach międzynarodowych. Mgr Piotr Waluk jest również współautorem trzech innych artykułów:

- *Wigner function of a qubit*, arXiv:1512.02867 [math-ph];
- *When Isolated Horizons meet Near Horizon Geometries*, Everything about Gravity, pp. 614-619 (2017), arXiv:1602.01158 [gr-qc];
- *Spacetimes foliated by nonexpanding and Killing horizons: Higher dimension*, Phys. Rev. D 94 064018, arXiv:1605.07038 [gr-qc].

Moja ocena rozprawy doktorskiej jest jednoznacznie pozytywna. Praca ta spełnia (z nawiązką) wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Zawiera szereg nowych wyników. Najważniejsze z nich to:

- nowy dowód dodatniości globalnej energii,
- uogólnienie moich wyników dla teorii zlinearyzowanej na przypadek metryki Kottlera oraz
- pierwsza (na świecie) kwazilokalna analiza równań Einsteina, która doprowadziła do powiązania kwazilokalnej masy Hawkinga z kwadratową „kwazilokalną gęstością energii” liniowego pola grawitacyjnego reprezentowaną przez Hamiltonian niezmienniczy ze względu na cechowanie.

Autor rozprawy wykazał się biegłością w analizowaniu (i upraszczaniu) skomplikowanych układów równań różniczkowych, sprawnością w posługiwaniu się wyrafinowanymi narzędziami matematycznymi, od geometrii po skomplikowaną analizę funkcjonalną, a także dużą samodzielnością.

Warszawa, 13 września 2021 r.

Jacek Jędruski