

I. Formy Różniczkowe i Analiza Wektorowa

1. Wektory styczne jako operatory różniczkowe

W przestrzeni afinicznej A^n , której odpowiada “styczna do niej” przestrzeń wektorowa V^n , wektor v można parametryzować współczynnikami rozkładu względem dowolnej bazy $\{e_i\}$:

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i,$$

gdzie v^i to liczby, które nazywamy składowymi wektora v względem bazy $\{e_i\}$. Takie wektory są “wolne”: możemy je “zaczepiać” w dowolnym punkcie. Można też rozważać przestrzeń wektorów *zaczepionych w danym punkcie*. Nie wnosi to jednak nic nowego, bowiem w geometrii afinicznej przestrzenie wektorów zaczepionych w różnych punktach są ze sobą kanonicznie izomorficzne: są one kanonicznie izomorficzne tej samej przestrzeni wektorów wolnych V^n .

W geometrii różniczkowej, przestrzenie wektorów stycznych do krzywej powierzchni (np. do powierzchni sfery) są *różne* w różnych punktach. Chcielibyśmy tak umieć kodować informację o takim wektorze, aby nie odwoływać się do dużej przestrzeni afinicznej, w której wszystko jest “zanurzone”. Być może, bowiem, przestrzeń (albo czaso-przestrzeń) w której żyjemy jest taką “krzywą powierzchnią” i nie ma poza nią żadnej uniwersalnej przestrzeni afinicznej, do której moglibyśmy się odwoływać. W tym celu wygodnie będzie interpretować *wektory zaczepione w danym punkcie* jako różniczkowania (operatory różniczkowe pierwszego rzędu).

Pokażemy teraz, że taka interpretacja jest rzeczywiście możliwa. Weźmy wektor $v \in V^n$ i punkt $x \in A^n$. Para (x, v) definiuje operator różniczkowy v_x pierwszego rzędu “zaczepiony w punkcie x ”, działający na funkcje, którego wartość na danej funkcji jest równa pochodnej kierunkowej tej funkcji w kierunku wektora v , obliczonej w punkcie x :

$$C^1(A) \ni f \longrightarrow v_x(f) := f'(x) \cdot v \in R^1,$$

gdzie $C^1(A)$ oznacza przestrzeń funkcji raz różniczkowalnych w sposób ciągły, wyposażona w topologię zbieżności jednostajnej *wraz z pierwszymi pochodnymi*. Operator ten ma następujące własności, które przyjmujemy później jako *aksjomaty*:

- 1) liniowość: $v_x(\alpha f + \beta g) = \alpha v_x(f) + \beta v_x(g)$,
- 2) ciągłość: jeśli ciąg funkcji $f_n \in C^1(A)$ jest zbieżny do $f_0 \in C^1(A)$ (w topologii C^1 , tzn. jednostajnie, wraz z pierwszymi pochodnymi) to $v_x(f_n)$ zbiega do $v_x(f_0)$,
- 3) reguła Leibniza: $v_x(fg) = f(x)v_x(g) + g(x)v_x(f)$.

Określenie “zaczepiony w punkcie x ” odnosi się do tego, że w drugim aksjomacie pojawiają się wartości funkcji f i g obliczone *właśnie w tym punkcie*. Gdy nie prowadzi to do nieporozumień, będziemy niekiedy opuszczali to określenie.

Twierdzenie. Każdy operator różniczkowy pierwszego rzędu zaczepiony w x (odwzorowanie spełniające powyższe aksjomaty) jest powyższego typu, tzn. jest zadany przez parę (x, v) , gdzie $v \in V$.

Dowód. (Podamy ideę przewodnią dowodu, pomijając pewne szczegóły techniczne). Niech będzie dany operator różniczkowy v_x spełniający aksjomaty. Wybierzmy w A^n jakikolwiek prostoliniowy układ współrzędnych (τ^k) , związany z wyborem pewnej bazy:

$$y(\tau) = x + \sum_{k=1}^n \tau^k e_k.$$

W otoczeniu punktu x funkcję f można rozłożyć w szereg Taylora:

$$f(y(\tau)) = f(x) + \sum_{k=1}^n \tau^k a_k + R(\tau),$$

gdzie R jest funkcją, która znika w zerze wraz ze swymi pochodnymi pierwszego rzędu. Współczynniki rozwinięcia a_k są dane ze wzoru Taylora, jako wartości odpowiednich pochodnych funkcji f w punkcie x :

$$a_k = \frac{d}{d\tau^k} f(x + \tau^i e_i)|_{\tau=0} =: \frac{\partial}{\partial \tau^k} f(x).$$

Wykażemy teraz, że operator różniczkowy v_x daje wynik równy zeru, gdy zastosować go do pierwszego (stałego) wyrazu w powyższym rozwinięciu funkcji f . Wynika to z poniższego lematu:

Lemat. $v_x(1) = 0$

Dowód. $v_x(1 \cdot 1) = v_x(1) + v_x(1)$

Stosując ten lemat do dowolnej funkcji stałej $f(\tau) \equiv c \equiv c \cdot 1(\tau)$ otrzymujemy z liniowości $v_x(c) = cv_x(1) = 0$.

Okazuje się, że v_x znika również na trzecim wyrazie rozwinięcia, bowiem – jak za chwilę pokażemy – znika na dowolnej funkcji której wartość w x oraz wartość wszystkich jej pierwszych pochodnych w x jest równa zeru. W trakcie dowodu będzie nam potrzebna dowolna funkcja ψ zmiennej rzeczywistej, o następujących własnościach:

- 1) $\psi(t) \equiv 1$ dla $t \leq \frac{1}{2}$
- 2) $\psi(t) \equiv 0$ dla $1 \leq t$
- 3) ψ jest klasy C^1 .

Istnienie takich funkcji (nawet klasy C^∞) było wykazane wcześniej.

Możemy teraz wykazać następujący

Lemat. Operator v_x ma własność *lokalności*: jeśli dwie funkcje f i g są sobie równe w pewnym otoczeniu punktu x to v_x ich nie rozróżnia, tzn. $v_x(f) = v_x(g)$.

Dowód. Rozważamy funkcję $h := f - g$, która znika w pewnym otoczeniu punktu x , tzn. – w języku współrzędnych (τ^i) – w pewnym otoczeniu zera. Weźmy tak małą liczbę $\epsilon > 0$, by to otoczenie zawierało kulę

$$K(0, \epsilon) = \{(\tau^i) \mid \sum_{k=1}^n (\tau^k)^2 < \epsilon^2\}.$$

Jeśli teraz położyć

$$\psi_\epsilon(\tau) := \psi\left(\frac{\|\tau\|}{\epsilon}\right),$$

gdzie

$$\|\tau\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\tau^k)^2},$$

to ψ_ϵ zeruje się tożsamościowo poza tym otoczeniem. A zatem funkcja $h \cdot \psi_\epsilon$ zeruje się *tożsamościowo*, bowiem h znika w epsilonowym otoczeniu zera zaś ψ_ϵ – poza nim. Mamy więc:

$$0 = v_x(0) = v_x(h \cdot \psi_\epsilon) = v_x(h)\psi_\epsilon(0) + v_x(\psi_\epsilon)h(0) = v_x(h) = v_x(f) - v_x(g),$$

co kończy dowód lokalności operatora v_x .

Aby wykazać, że $v_x(R) = 0$ rozważymy teraz ciąg funkcji $R_\epsilon := R \cdot \psi_\epsilon$. Ponieważ ψ_ϵ jest równa jedności w pewnym otoczeniu zera, to R_ϵ pokrywa się z R w tym otoczeniu. Z lokalności wynika zatem: $v_x(R_\epsilon) = v_x(R)$. Łatwo jednak pokazać, że gdy R i jej pochodne znikają w zerze, to ciąg funkcji R_ϵ zbiega do zera w sensie C^1 . Z ciągłości operatora v_x mamy zatem:

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_x(R_\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_x(R) = v_x(R).$$

Ze znikania v_x na pierwszym i ostatnim wyrazie rozwinięcia funkcji f wynika:

$$v_x(f) = v\left(\sum_{k=1}^n \tau^k a_k\right) = \sum_{k=1}^n a_k v_x(\tau^k).$$

Oznaczmy wynik działania operatora v_x na funkcji liniowej τ^k jako $v^k := v_x(\tau^k)$. Mamy więc:

$$v_x(f) = \sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial}{\partial \tau^k} f(x) = \frac{d}{d\tau} f\left(x + t\left(\sum_{k=1}^n v^k e_k\right)\right)\Big|_{t=0} = f'(x) \cdot \left(\sum_{k=1}^n v^k e_k\right)$$

a zatem v_x jest rzeczywiście operatorem różniczkowania w kierunku wektora $\sum_{k=1}^n v^k e_k$. Widzimy, że składowe v^k tego wektora można otrzymać jako wynik działania operatora v_x na funkcje liniowe τ^k . Będziemy w przyszłości identyfikować operator różniczkowy pierwszego rzędu v_x z wektorem $v := \sum_{k=1}^n v^k e_k$, w którego kierunku ten operator różniczkuje. Przy tej identyfikacji piszemy zatem

$$v_x = \sum_{k=1}^n v^k \frac{\partial}{\partial \tau^k} =: v^k \frac{\partial}{\partial \tau^k}.$$

W ostatniej równości po raz pierwszy zastosowaliśmy *konwencję sumacyjną Einsteina* polegającą na tym, że jeśli w danym wzorze ten sam wskaźnik pojawia się dwa razy: raz na dole i raz na górze, to należy rozumieć, że przed całym wyrażeniem stoi znak sumowania

po wszystkich możliwych wartościach tego wskaźnika. Możliwość opuszczania znaku sumy znacznie upraszcza wzory i – jak się okazuje – nie prowadzi do żadnych nieporozumień, jeśli tylko poprawnie stosujemy konwencję Einsteina.

Przy powyższej identyfikacji operator różniczkowy pierwszego rzędu $\frac{\partial}{\partial \tau^k}$ utożsamiamy zatem z k -tym elementem e_k bazy przestrzeni V^n .

Ćwiczenie. Weźmy kartezjański i sferyczny układ współrzędnych w przestrzeni euklidesowej E^3 . Znaleźć związek między $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ a $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Następnie udowodnić, że wektory $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ są wzajemnie ortogonalne oraz policzyć długość wektora $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Mamy następujące zależności:

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi),$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi),$$

$$z = r \cos(\theta).$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sin(\theta) \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial z} =$$

$$= \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{r} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{x}{r} e_x + \frac{y}{r} e_y + \frac{z}{r} e_z$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = r \cos(\theta) \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + r \cos(\theta) \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} - r \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial z} =$$

$$= \frac{zx}{\sqrt{x^2 + y^2}} e_x + \frac{zy}{\sqrt{x^2 + y^2}} e_y - \sqrt{x^2 + y^2} e_z$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} = 0.$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \theta} \right\|^2 = \frac{z^2 x^2}{x^2 + y^2} + \frac{z^2 y^2}{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 = z^2 + y^2 + z^2 = r$$

2. Rozmaitości różniczkowe. Przestrzeń styczna

Język, który rozwinęliśmy powyżej, służy do opisu takich obiektów geometrycznych jak pole wektorowe w dowolnej (krzywoliniowej) parametryzacji (τ^k) przestrzeni afinicznej A^n . Umiemy tłumaczyć ten opis z jednej parametryzacji do drugiej i nigdzie nie musimy

korzystać z informacji, że przestrzeń w której uprawiamy tę geometrię jest *plaską* przestrzenią afiniczną. Okazuje się, że ta informacja jest rzeczywiście nieistotna z punktu widzenia zdefiniowanych powyżej operacji. Wszystkie je można uprawiać w dowolnej “krzywej” przestrzeni.

Pozostaniemy na prostym, intuicyjnym poziomie i będziemy “dopuszczali do konkurencji” takie krzywe przestrzenie, które można zdefiniować w przestrzeni afinicznej A^n skończoną ilością równości:

$$\begin{cases} G_1(x) = 0 \\ \vdots \\ G_k(x) = 0 \end{cases},$$

gdzie G_i są funkcjami rzeczywistymi na A^n , odpowiednio gładkimi. Będziemy przy tym zakładać *regularność* powyższego układu, tzn. *niezależność* powyższych równań. Chodzi o to, by nie dublować warunków niosących tę samą informację. Dla równań nieliniowych niezależność formułujemy tak, jak w twierdzeniu o odwzorowaniach uwikłanych: zakładamy, że ich różniczki są niezależne. W dalszym ciągu zatem przyjmujemy następującą definicję:

Definicja. Przez m -wymiarową rozmaitość różniczkowalną M klasy C^l rozumiemy zbiór punktów dowolnej, n -wymiarowej przestrzeni afinicznej A^n , zdefiniowanych jako zbiór wszystkich rozwiązań powyższego, regularnego układu warunków, przy czym:

- 1) “regularność” układu oznacza, że w każdym punkcie $x \in M$ zbiór różniczek ($dG_i(x)$) funkcji definiujących G_i jest liniowo niezależny,
- 2) wymiar m oznacza, że zachodzi: $m + k = n$ (wymiar rozmaitości jest równy wymiarowi przestrzeni minus ilość równań),
- 3) klasa C^l oznacza, że funkcje definiujące G_i są różniczkowalne conajmniej l razy w sposób ciągły.

Gdy weźmiemy wektor “styczny” v do A^n w punkcie $x \in M$, to na ogół “wystaje” on z M , tzn. punkty linii prostej $x + \tau v$ nie należą do M poza $\tau = 0$, bowiem $G_i(x + \tau v) \neq 0$. Wektory styczne do M to takie, które “najmniej wystają”, tzn. takie, na których powyższe wyrażenie zeruje się przynajmniej w części liniowej względem parametru τ . Wtedy co prawda warunki definiujące $G_i = 0$ nie są na ogół spełnione, ale lewa strona jest małą wyższego rzędu w zmiennych τ .

Definicja. Przestrzenią styczną do M w punkcie $x \in M$ nazywamy przestrzeń wektorową $T_x M \subset V^n$, na której zerują się różniczki $dG_i(x)$ funkcji definiujących:

$$T_x M := \{v \in V^n \mid \langle dG_i(x), v \rangle = 0\} .$$

Z regularności warunku definiującego wynika, że $T_x M$ jest m -wymiarową przestrzenią wektorową.

Niech (e_1, \dots, e_m) będzie dowolną bazą tej przestrzeni. Uzupełnijmy ją dowolnymi wektorami h_1, \dots, h_k do bazy całej przestrzeni V^n . Punkty przestrzeni A^n możemy parametryzować parametrami (τ^i, η^j) , gdzie $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k$, w następujący sposób:

$$y = x + \sum_{i=1}^m \tau^i e_i + \sum_{j=1}^k \eta^j h_j .$$

W tej parametryzacji rozmaitość M jest zadana przy pomocy k równań na k niewiadomych η^j . Z twierdzenia o funkcjach uwikłanych wynika, że równania te definiują (przynajmniej w pewnym otoczeniu zera w R^m) funkcję uwikłaną

$$R^m \ni (\tau^i) \longrightarrow (F^j(\tau)) \in R^k$$

i taką, że w pewnym otoczeniu punktu x punkty $y \in A^n$ należą do M wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi równanie

$$\eta^j = F^j(\tau) .$$

W ten sposób z opisu “uwikłanego” rozmaitości (jako zbioru rozwiązań układu równań) możemy zawsze przejść do opisu “parametrycznego”, jako zbioru punktów postaci:

$$y(\tau) = x + \sum_{i=1}^m \tau^i e_i + \sum_{j=1}^k F^j(\tau) h_j .$$

Z twierdzenia o funkcjach uwikłanych otrzymujemy też:

$$\frac{\partial F^j}{\partial \tau^i}(0) = - \left[\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}(x_0) \right)^{-1} \right]_k^j \frac{\partial G^k}{\partial \tau^i}(0) = 0$$

bowiem pochodne funkcji G^k po τ^i , to pochodne w kierunku e_i , zaś wektory styczne do M były właśnie zdefiniowane w ten sposób, że pochodne G w ich kierunku znikają.

Taka parametryzacja (inaczej: *mapa*) jest na ogół określona tylko w pewnym otoczeniu punktu x , a nie globalnie. Aby uprawiać geometrię na M nie wystarczy zatem jedna mapa, ale ich zbiór (inaczej *atlas*) pokrywający całe M . Z konstrukcji map wynika, że gdy jakiś punkt y należy do dwu różnych map, to przejście od jednych współrzędnych (τ^i) do drugich współrzędnych (t^i) jest lokalnym dyfeomorfizmem (odwzorowaniem różniczkowalnym, odwracalnym) klasy C^l , z R^m w R^m .

Definicja wektora stycznego, którą przyjęliśmy powyżej, odwołuje się do przestrzeni A^n , w której jest “zanurzona” nasza rozmaitość M . Dzięki istnieniu lokalnych map, możemy jednak podać równoważną definicję “wewnętrzną” (po angielsku: *intrinsic*), która nie odwołuje się do niczego poza M . Oczywiście nie może to być definicja wektora jako uporządkowanej pary punktów (początek i koniec) jak w przestrzeni afinicznej, bowiem – jak wiemy – taki wektor na ogół “wystaje” z M i wcale nie jest doń styczny. Zauważmy jednak, że możemy bez żadnych zmian wziąć definicję wektora stycznego do M w punkcie x jako operatora różniczkowego pierwszego rzędu, zaczepionego w x , działającego na gładkie funkcje określone na M .

Jako funkcje gładkie na M możemy brać obciążenia do M gładkich funkcji określonych na A^n . Taka funkcja definiuje lokalnie (w otoczeniu punktu x_0) funkcję parametrów τ daną wzorem $\tilde{f}(\tau) := f(y(\tau))$. Odwrotnie, gdy mamy gładką (klasy C^l) funkcję \tilde{f} parametrów τ , to pochodzi ona z obciążenia do M pewnej funkcji określonej w A^n , na przykład funkcji, która we współrzędnych (τ^i, η^j) wyraża się wzorem $f(\tau^i, \eta^j) := \tilde{f}(\tau^i)$.

I znów widzimy, że do określenia gładkości funkcji możemy zapomnieć o A^n i posługiwać się tylko lokalnymi mapami. Możemy więc zastosować twierdzenie udowodnione

poprzednio. A zatem każdy operator różniczkowy działający w punkcie należącym do M jest postaci:

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial \tau^i} .$$

Poza tym, wzór na pochodną funkcji złożonej implikuje tożsamość

$$\frac{\partial}{\partial \tau^i} \tilde{f} = \frac{\partial}{\partial \tau^i} f(x_0 + \tau^i e_i + F^j(\tau) h_j) = e_i(f) + \frac{\partial F^j}{\partial \tau^i} h_j(f) = e_i(f) ,$$

gdzie $e_i(f)$ oraz $h_j(f)$ oznaczają wynik działania wektorów na funkcje w A^n , które poznaliśmy poprzednio, tzn. różniczkowaniem funkcji f w kierunku tych wektorów.

Otrzymujemy stąd identyfikację

$$\frac{\partial}{\partial \tau^i} = e_i .$$

Zatem nasz operator różniczkowy na M , który jest postaci $v = v^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$ możemy identyfikować z wektorem $v^i e_i$, stycznym do M w dużej przestrzeni A^n .

Jest jasne, że wszystkie wektory z przestrzeni $T_x M$ są tej postaci, bowiem przechodząc do parametryzacji punktów rozmaitości M przy pomocy współrzędnych τ^i , możemy traktować funkcje na M jako funkcje współrzędnych. A zatem nasz dowód możemy bez zmian przenieść na ten przypadek.

W tej chwili możemy już zupełnie “zerwać pępowinę” wiążącą nas z geometrią afiniczną i zapomnieć o wszystkim poza M i jej *atlasem*. Oczywiście, geometria afiniczna pozwala nam skonstruować atlas dla rozmaitości definiowanych przy pomocy regularnego układu równań i wyobrażać sobie intuicyjnie wektory styczne do takich rozmaitości. Podkreślamy jednak, że do uprawiania geometrii na M można zapomnieć skąd się wziął atlas. Nie musimy interpretować wektora v jako wektora w dużej przestrzeni wektorowej V^n , stycznej do dużej przestrzeni A^n . Wystarczy nam jego interpretacja jako operatora różniczkowego pierwszego rzędu, działającego na funkcje określone na M . Zanurzenie M w A^n było pożyteczne, bo pozwalało nam konstruować wygodne parametryzacje punktów powierzchni M przy pomocy parametrów $(\tau^i) \in R^m$. Jeśli jednak już mamy jakąś parametryzację, to można zapomnieć skąd się wzięła i używać jej np. do reprezentowania *wektorów stycznych do przestrzeni M* (tzn. operatorów różniczkowych na M) jako kombinacji liniowych operatorów (wektorów) postaci $\frac{\partial}{\partial \tau^i}$, bez konieczności “wychodzenia” poza M i interpretowania tych wektorów w większej przestrzeni A^n .

Możemy zatem myśleć abstrakcyjnie o M jako o *rozmaitości różniczkowalnej*, tzn. o parze (M, \mathcal{A}) , gdzie M jest zbiorem punktów zaś \mathcal{A} jest *atlasem*, tzn. zbiorem wszystkich dopuszczalnych lokalnych parametryzacji (map). Mówimy, że atlas jest klasy C^l , jeśli transformacja jednych współrzędnych na drugie (w obszarze gdzie obie parametryzacje są określone) jest lokalnym dyfeomorfizmem R^m na R^m .

Na takiej *rozmaitości* można zdefiniować funkcję gładką f jako taką, która daje gładką funkcję \tilde{f} , gdy wyrazimy jej wartość w zależności od lokalnych współrzędnych, używając

w tym celu jakiegokolwiek mapy z atlasu \mathcal{A} . A zatem definiujemy przestrzeń styczną $T_x M$ do M w punkcie x jako przestrzeń wszystkich operatorów różniczkowych “zaczepionych” w punkcie x . Jeśli wybierzemy dowolną mapę (τ^i) w otoczeniu x , to operatory $\frac{\partial}{\partial \tau^i}$ stanowią bazę przestrzeni $T_x M$, tzn. każdy wektor jest kombinacją powyższych, czyli może być jednoznacznie przedstawiony w postaci $v = v^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$. Liczby v^i nazywa się składowymi wektora v względem układu współrzędnych (τ^i) . Jeśli wybierzemy jakąkolwiek inną parametryzację (t^k) , to twierdzenie o różniczkowaniu superpozycji daje nam możliwość przedstawienia starej bazy względem nowej:

$$\frac{\partial}{\partial \tau^i} = \frac{\partial t^k}{\partial \tau^i} \frac{\partial}{\partial t^k} .$$

Wynika stąd wzór na zamianę składowych wektora przy przejściu do nowej parametryzacji:

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial \tau^i} = v^i \frac{\partial t^k}{\partial \tau^i} \frac{\partial}{\partial t^k} = \bar{v}^k \frac{\partial}{\partial t^k}$$

(uwaga na konwencję Einsteina), gdzie oznaczyliśmy przez \bar{v}^k składowe tego samego wektora v , ale względem nowej bazy:

$$\bar{v}^k = v^i \frac{\partial t^k}{\partial \tau^i} .$$

Zwracamy uwagę, że wektory zaczepione w różnych punktach *nie mają ze sobą nic wspólnego*. Należą do różnych przestrzeni i np. nie można ich dodawać do siebie. (Gdyby wszystko było zanurzone w dużej afinicznej przestrzeni A^n , to oba te wektory można traktować jako elementy dużej przestrzeni wektorowej V^n i dodać do siebie. Wynik takiej operacji nie jest na ogół styczny do M . A zatem z punktu widzenia “wewnętrznego”, jeśli chcemy całą naszą geometrię uprawiać w krzywej przestrzeni M i nie odwoływać się do niczego poza nią, to taka operacja nie ma sensu).

Można rozważać też pola wektorowe, tzn. rodziny wektorów “po jednym w każdym punkcie”

Definicja. Pole wektorowe jest to operator różniczkowy, ciągły

$$X : C^1 \longrightarrow C$$

spełniający warunki

- 1) $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$,
- 2) $X(fg) = fX(g) + gX(f)$.

Oczywiście, jeśli X jest polem wektorowym, to jego wartość $X(x)$ w punkcie $x \in M$, dana wzorem:

$$(X(x))(f) := (X(f))(x)$$

jest wektorem.

Ćwiczenie. Pokazać, że komutator dwu pól wektorowych X i Y , tzn. operator różniczkowy $[X, Y]$ działający na funkcje w następujący sposób:

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$$

też jest polem wektorowym, tzn. spełnia powyższe aksjomaty. Obliczyć jego składowe $[X, Y]^i$ względem układu współrzędnych (τ^i) , gdy znane są składowe X^i oraz Y^i obu pól. Konkretnie – wykazać wzór:

$$[X, Y]^i = X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i .$$

Dowód. Sprawdzamy drugi aksjomat Leibniza:

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(fY(g) + gY(f)) - Y(fX(g) + \\ &+ gX(f)) = X(f)Y(g) + fX(Y(g)) + X(g)Y(f) + gX(Y(f)) + \\ &- Y(f)X(g) - fY(X(g)) - Y(g)X(f) - gY(X(f)) = \\ &= f([X, Y](g)) + g([X, Y](f)) \end{aligned}$$

Zapiszmy komutator we współrzędnych:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= [X, Y]^k \frac{\partial}{\partial \tau^k}, \\ X &= X^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}, \\ Y &= Y^j \frac{\partial}{\partial \tau^j}, \end{aligned}$$

i obliczmy jego działanie na dowolną funkcję f :

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X^i \frac{\partial}{\partial \tau^i} \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial \tau^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial \tau^j} \left(X^i \frac{\partial f}{\partial \tau^i} \right) = \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial \tau^i} \frac{\partial f}{\partial \tau^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^i \partial \tau^j} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^j \partial \tau^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial \tau^j} \frac{\partial f}{\partial \tau^i} = \\ &= \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial \tau^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial \tau^j} \right) \frac{\partial}{\partial \tau^j} (f) \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że poszczególne człony tej różnicy nie mają żadnego sensu geometrycznego. Rzeczywiście, rozważmy pole wektorowe „ $\nabla_X Y$ ”, które definiujemy w wybranym układzie współrzędnych współrzędnych (τ^i) wzorem

$$“\nabla_X Y” = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial \tau^i} \frac{\partial}{\partial \tau^j} ,$$

a które wygląda jak „pochodna pola Y w kierunku pola X . Pokażemy, że taka operacja nie ma większego sensu, bowiem jej wynik zależy od układu współrzędnych, w którym ją

definiujemy. I rzeczywiście: przejdźmy do innego układu współrzędnych $\{\eta^a\}$ w tej samej przestrzeni. Ponieważ mamy:

$$\frac{\partial}{\partial \tau^i} = \frac{\partial \eta^a}{\partial \tau^i} \frac{\partial}{\partial \eta^a},$$

otrzymujemy zatem:

$$\begin{aligned} X &= X^i \frac{\partial}{\partial \tau^i} = X^i \frac{\partial \eta^a}{\partial \tau^i} \frac{\partial}{\partial \eta^a} = \tilde{X}^a \frac{\partial}{\partial \eta^a}, \\ Y &= Y^j \frac{\partial}{\partial \tau^j} = Y^j \frac{\partial \eta^a}{\partial \tau^j} \frac{\partial}{\partial \eta^a} = \tilde{Y}^a \frac{\partial}{\partial \eta^a}, \end{aligned}$$

gdzie (\tilde{X}^a) oraz (\tilde{Y}^a) są współrzędnymi tych samych pól w nowym układzie współrzędnych. Wyrazimy zatem współrzędne definiowanego pola “ $\nabla_X Y$ ” w nowych współrzędnych:

$$“\nabla_X Y” = \left(X^i \frac{\partial}{\partial \tau^i} Y^j \right) \frac{\partial \eta^b}{\partial \tau^j} \frac{\partial}{\partial \eta^b} = \left(X^i \frac{\partial}{\partial \tau^i} \tilde{Y}^b - X^i Y^j \frac{\partial^2 \eta^b}{\partial \tau^i \partial \tau^j} \right) \frac{\partial}{\partial \eta^b}.$$

Korzystając z poprzednich wzorów widzimy, że pierwszy człon jest rzeczywiście równy podobnemu wyrażeniu jak to definiujące, ale w nowych współrzędnych. Pozostaje jednak różny od zera dodatek zawierający drugie pochodne nowych współrzędnych względem starych. Mamy bowiem:

$$“\nabla_X Y” = \left(\tilde{X}^a \frac{\partial}{\partial \eta^a} \tilde{Y}^b \right) \frac{\partial}{\partial \eta^b} - X^i Y^j \frac{\partial^2 \eta^b}{\partial \tau^i \partial \tau^j} \frac{\partial}{\partial \eta^b}.$$

Gdybyśmy liczyli obiekt “ $\nabla_X Y$ ” we współrzędnych (η^a) , to wystąpiłby tylko pierwszy człon. A zatem definicja taka *nie ma żadnego sensu*, bowiem zależy od układu współrzędnych. Na podkreślenie zasługuje fakt, że drugi człon w powyższym wzorze jest symetryczny względem zamiany X na Y , wobec tego upraszcza się w wyrażeniu:

$$“\nabla_X Y” - “\nabla_Y X” = [X, Y],$$

w wyniku czego otrzymujemy obiekt geometryczny, niezależny od opisu współrzędniowego. Było to oczywiste od samego początku, bowiem obiekt ten zdefiniowaliśmy przy pomocy operacji czysto geometrycznych, bez użycia układów współrzędnych.

3. Kowektory. Różniczka funkcji

Kowektory styczne do M to obiekty dualne do wektorów, czyli funkcjonały liniowe na wektorach. Taki kowektor “zaczepiony w punkcie x ” to jakby “maszynka”, która ma jedno wejście i jedno wyjście. Na wejście możemy “wrzucać” wektory zaczepione w x , a na wyjściu otrzymujemy wynik operacji, w postaci liczby. Jeśli ten wynik zależy *w sposób liniowy* od wektora “wrzuconego” do maszynki, to cała maszynka jest kowektorem. Zbiór

wszystkich kowektorów zaczepionych w x oznaczamy T_x^*M . Nosi on naturalną strukturę przestrzeni wektorowej dualnej (dwoistej) względem T_xM .

Definicja. dla dowolnej funkcji różniczkowalnej f , jej różniczką w punkcie x nazywamy kowektor $df(x)$, którego wartość na dowolnym wektorze v_x jest równa pochodnej f względem tego wektora:

$$\langle df(x), v_x \rangle := v_x(f) .$$

Pole kowektorowe, będące kolekcją kowektorów $df(x)$ wziętych w punktach, w których f jest określona, nazywamy różniczką funkcji f i oznaczamy df .

Lemat. W parametryzacji $\{\tau^k\}$ mamy:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \tau^k} d\tau^k .$$

Lemat. Jeśli (τ^k) jest lokalną parametryzacją M , to (w każdym punkcie x gdzie współrzędne τ^i są określone) układ kowektorów $(d\tau^i)$ stanowi bazę przestrzeni ko–stycznej T_x^*M .

Dowód. Niech będzie dany kowektor $\alpha \in T_x^*M$.

Na dowolnym wektorze $T_xM \ni v = v^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$ jego wartość wynosi:

$$\langle \alpha, v \rangle = v^i \langle \alpha, \frac{\partial}{\partial \tau^i} \rangle .$$

Ale, jak już wiemy, składowa v^i wektora w danej mapie jest równa wartości tego wektora w działaniu na odpowiednią współrzędną τ^i , a zatem mamy

$$v^i = v(\tau^i) = \langle d\tau^i, v \rangle .$$

Oznaczając

$$\alpha_i := \langle \alpha, \frac{\partial}{\partial \tau^i} \rangle$$

mamy:

$$\langle \alpha, v \rangle = \langle d\tau^i, v \rangle \alpha_i = \langle \alpha_i d\tau^i, v \rangle .$$

Równość ta oznacza, że dwie “maszynki” α oraz $\alpha_i d\tau^i$ dają ten sam wynik na dowolnym wektorze v . A zatem są to *identyczne* kowektory:

$$\alpha = \alpha_i d\tau^i .$$

Każdy zatem kowektor może zostać rozłożony jako kombinacja liniowa różniczek współrzędnych τ^i . Aby zakończyć dowód należy pokazać, że różniczki te stanowią układ liniowo niezależnych kowektorów. Wynika to z natępującej obserwacji:

$$\langle d\tau^i, \frac{\partial}{\partial \tau^j} \rangle = \frac{\partial}{\partial \tau^j} \tau^i = \delta_j^i ,$$

a zatem układ $(d\tau^i)$ stanowi w przestrzeni ko–stycznej T_x^*M bazę *dualną* względem bazy $(\frac{\partial}{\partial \tau^j})$ w przestrzeni stycznej T_xM .

4. Formy różniczkowe. Różniczka zewnętrzna formy

Formy różniczkowe zewnętrzne to pola pewnych obiektów geometrycznych zwanych multikowektorami (n-kowektorami).

Obiekt zwany n-kowektorem (zaczepionym w punkcie x) to n-liniowa, antysymetryczna forma na n wektorach (zaczepionych w punkcie x). Jest to zatem “maszynka” która ma n “slotów” wejściowych. Gdy włożymy do każdego z nich po jednym wektorze (do i -tego “slotu” wektor $X_{(i)}$), to maszynka wyprodukuje nam liczbę, którą oznaczamy:

$$\langle \alpha_{(n)}; X_{(1)}, \dots, X_{(n)} \rangle .$$

Warunek n-liniowości oznacza, że gdy mamy $X_{(1)} = aY + bZ$ to zachodzi

$$\langle \alpha_{(n)}; X_{(1)}, \dots, X_{(n)} \rangle = a \langle \alpha_{(n)}; Y, \dots, X_{(n)} \rangle + b \langle \alpha_{(n)}; Z, \dots, X_{(n)} \rangle ,$$

zaś antysymetryczność, że zamieniając miejscami dowolne dwa wektory $X_{(i)}$ oraz $X_{(j)}$, spowodujemy zamianę wyniku na przeciwny:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_{(n)}; X_{(1)}, \dots, X_{(i)}, \dots, X_{(j)}, \dots, X_{(n)} \rangle = \\ & = - \langle \alpha_{(n)}; X_{(1)}, \dots, X_{(j)}, \dots, X_{(i)}, \dots, X_{(n)} \rangle . \end{aligned}$$

Działania na formach różniczkowych (na multikowektorach):

$$1) \langle a\alpha_{(n)} + b\beta_{(n)}; X_{(1)}, \dots, X_{(n)} \rangle = a \langle \alpha_{(n)}; X_{(1)}, \dots, X_{(n)} \rangle + b \langle \beta_{(n)}; X_{(1)}, \dots, X_{(n)} \rangle$$

2) iloczyn zewnętrzny

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_{(n)} \wedge \beta_{(m)}; X_{(1)}, \dots, X_{(n)}, X_{(n+1)}, \dots, X_{(m+n)} \rangle := \\ & \frac{1}{n!m!} \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \langle \alpha_{(n)}; X_{(\sigma_1)}, \dots, X_{(\sigma_n)} \rangle \langle \beta_{(m)}; X_{(\sigma_{n+1})}, \dots, X_{(\sigma_{n+m})} \rangle . \end{aligned}$$

We wzorze tym σ oznacza dowolną permutację $n + m$ elementów, zaś $|\sigma|$ to *nieparzystość* permutacji, równa “+1” dla permutacji nieparzystej (tzn. takiej, którą można zrealizować przez nieparzystą ilość *inwersji*, czyli przestawień) i równy “0” dla permutacji parzystych. Pośród $(n + m)!$ składników sumy, odpowiadających tylu właśnie permutacjom $n + m$ -elementów, jest wiele takich samych. Np. weźmy jakikolwiek składnik, oraz składnik powstały z niego poprzez permutację oddzielnie wektorów $X_{(\sigma_1)}, \dots, X_{(\sigma_n)}$ (włożonych do “slotów” formy $\alpha_{(n)}$) i oddzielnie wektorów $X_{(\sigma_{n+1})}, \dots, X_{(\sigma_{n+m})}$ (włożonych do “slotów” formy $\beta_{(n)}$). Łatwo widać, że te składniki są *identyczne*. Wynika to bowiem z faktu, że pierwszy i drugi czynnik w iloczynie mogą co najwyżej zmienić znak wskutek permutacji wektorów włożonych w “sloty” wejściowe tej samej formy. Łatwo jednak widać, że ta ewentualna zmiana znaku jest kompensowana zmianą znaku współczynnika liczbowego $(-1)^{|\sigma|}$. Łatwo również widać, że liczba identycznych składników otrzymanych w ten sposób jest równa liczbie permutacji n elementów, pomnożonej przez liczbę (niezależnych) permutacji

m elementów. A zatem wszystkie składniki powyższej sumy “chodzą stadami” identycznych składników, a liczebność każdego takiego “stada” wynosi $n!m!$. Dlatego właśnie w powyższej definicji dzielimy przez tę liczebność. W rezultacie uwzględniamy elementy każdego “stada” tylko raz.

Lemat. Każda n -forma na ciągu n -wektorów liniowo zależnych znika.

Dowód. Jeśli ciąg wektorów $X_{(1)}, \dots, X_{(n-1)}, X_{(n)}$ jest liniowo zależny, to np. ostatni wektor jest kombinacją liniową poprzednich $n - 1$ wektorów. Wstawiając na miejsce $X_{(n)}$ tę kombinację i korzystając z liniowości w ostatnim “slocie” widzimy, że wartość formy na tym ciągu wektorów jest kombinacją liniową wartości formy na ciągach postaci

$$X_{(1)}, \dots, X_{(i)}, \dots, X_{(n-1)}, X_{(i)} ,$$

tzn. takich, że dwa wektory są identyczne. Ale wartość formy na takim ciągu *musi być równa zero* bowiem gdy zamienimy wektor o numerze i z wektorem ostatnim to: 1) wynik musi zmienić się na przeciwny z antysymetrii, ale 2) nic się nie zmieniło przy takiej zamianie, zatem wynik też się nie zmienił. Jedyny wynik, który spełnia takie – zdawałoby się sprzeczne – wymagania, to zero.

Lemat. W przestrzeni n -wymiarowej wszystkie formy $\alpha_{(m)}$ ($m > n$) są równe zero.

Dowód. W przestrzeni n -wymiarowej każdy układ m wektorów jest liniowo zależny, a zatem forma $\alpha_{(m)}$ znika na nim.

Lemat. Mnożenie zewnętrzne jest dwuliniowe i łączne.

Definicja. Różniczka zewnętrzna $d\alpha$ formy różniczkowej α jest wynikiem działania operatora “ d ” o następujących własnościach:

- 1) wynik $d\alpha_{(n)}$ działania operatora d na n -formę $\alpha_{(n)}$ jest $(n + 1)$ -formą,
- 2) $d(\alpha_{(n)} \wedge \beta_{(m)}) = (d\alpha_{(n)}) \wedge \beta_{(m)} + (-1)^n \alpha_{(n)} \wedge (d\beta_{(m)})$ – uogólniony wzór Leibniza,
- 3) wynik df działania d na zero-formę, (czyli funkcję) f jest równy dotychczas poznanej różniczce tej funkcji, którą oznaczaliśmy tym samym symbolem,
- 4) $d^2 = 0$ (pochodna pochodnej jest zawsze równa zero).

Na razie nie wiemy wcale, czy taki operator istnieje. Zauważmy jednak, że gdy (τ^i) jest dowolnym układem współrzędnych w n -wymiarowej przestrzeni, w której uprawiamy naszą geometrię, to dowolna m -forma w tej przestrzeni może być zapisana w postaci:

$$\alpha_{(m)} = \frac{1}{m!} \alpha_{i_1, \dots, i_m} d\tau^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tau^{i_m} = \sum_{i_1 < \dots < i_m} \alpha_{i_1, \dots, i_m} d\tau^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tau^{i_m} ,$$

gdzie współczynniki rozkładu α_{i_1, \dots, i_m} są oczywiście funkcjami – zależą od punktu x w którym tego rozkładu używamy. Z powyższych aksjomatów wynika, że powinno być

$$d\alpha_{(m)} = \frac{1}{m!} d\alpha_{i_1, \dots, i_m} \wedge d\tau^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tau^{i_m} .$$

Z tej obserwacji wcale jeszcze nie wynika, że operacja spełniająca aksjomaty rzeczywiście istnieje. Mogłoby się bowiem zdarzyć, że powyższy wzór na $d\alpha_{(m)}$ *niczego nie definiuje* bowiem wynik zależy np. od wyboru układu współrzędnych (τ^i) . Na szczęście tak nie jest, o czym mówi następujący

Lemat. Operacja dana powyższym wzorem jest dobrze określona i spełnia aksjomaty.

Dowód. Weźmy inny układ współrzędnych $\{\eta^k\}$ w tej samej przestrzeni. Otrzymujemy

$$\alpha_{(m)} = \frac{1}{m!} \tilde{\alpha}_{k_1, \dots, k_m} d\eta^{k_1} \wedge \dots \wedge d\eta^{k_m}$$

$$d\tau^i = \frac{\partial \tau^i}{\partial \eta^k} d\eta^k$$

Obliczamy współczynniki $\tilde{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{(m)} &= \frac{1}{m!} \alpha_{i_1, \dots, i_m} \left(\frac{\partial \tau^{i_1}}{\partial \eta^{k_1}} d\eta^{k_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial \tau^{i_m}}{\partial \eta^{k_m}} d\eta^{k_m} \right) = \\ &= \frac{1}{m!} \alpha_{i_1, \dots, i_m} \frac{\partial \tau^{i_1}}{\partial \eta^{k_1}}, \dots, \frac{\partial \tau^{i_m}}{\partial \eta^{k_m}} d\eta^{k_1} \wedge \dots \wedge d\eta^{k_m} \\ \tilde{\alpha} &= \alpha_{i_1, \dots, i_m} \frac{\partial \tau^{i_1}}{\partial \eta^{k_1}}, \dots, \frac{\partial \tau^{i_m}}{\partial \eta^{k_m}} \end{aligned}$$

Zastosujmy operację d do $\alpha_{(m)}$ w nowym układzie. Ponieważ nie wiemy czy wynik da tę samą formę, oznaczmy ten wynik przez $d\widetilde{\alpha}_{(m)}$:

$$\begin{aligned} d\widetilde{\alpha}_{(m)} &= \frac{1}{m!} d\tilde{\alpha}_{k_1, \dots, k_m} \wedge d\eta^{k_1} \wedge \dots \wedge d\eta^{k_m} = \\ &= \frac{1}{m!} d \left(\alpha_{i_1, \dots, i_m} \frac{\partial \tau^{i_1}}{\partial \eta^{k_1}}, \dots, \frac{\partial \tau^{i_m}}{\partial \eta^{k_m}} \right) \wedge d\eta^{k_1} \wedge \dots \wedge d\eta^{k_m} = \\ &= \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial \tau^{i_1}}{\partial \eta^{k_1}}, \dots, \frac{\partial \tau^{i_m}}{\partial \eta^{k_m}} \right) d\alpha_{i_1, \dots, i_m} \wedge d\eta^{k_1} \wedge \dots \wedge d\eta^{k_m} + \\ &+ \alpha_{i_1, \dots, i_m} d \left(\frac{\partial \tau^{i_1}}{\partial \eta^{k_1}}, \dots, \frac{\partial \tau^{i_m}}{\partial \eta^{k_m}} \right) \wedge d\eta^{k_1} \wedge \dots \wedge d\eta^{k_m} . \end{aligned}$$

Pokażemy, że wyrażenie w ostatniej linii jest tożsamościowo równe zeru. Jest tak, ponieważ różniczka wyrażenia w dużym nawiasie zawiera drugie pochodne funkcji τ^i :

$$\frac{\partial^2 \tau^i}{\partial \eta^k \partial \eta^l} .$$

Wyrażenia te są *symetryczne* względem zamiany k na l . Tymczasem muszą one być sumowane z iloczynami zewnętrznymi postaci $d\eta^k \wedge d\eta^l$, które – z kolei – są *antysymetryczne* względem takiej zamiany. Występują tu zatem wyrażenia typu $f_{kl} d\tau^k \wedge d\tau^l$. Taka suma musi być równa zeru, bowiem zamieniając k z l zachodzą jednocześnie dwa procesy: 1) suma zmienia znak na przeciwny, bowiem wyrażenia symetryczne nie zmieniły się, zaś antisymetryczne zmieniły znak na przeciwny, ale również 2) nic się nie zmieniło, bowiem zmieniliśmy jedynie nazwę wskaźnika k na l i odwrotnie, a i tak musimy sumować po wszystkich wartościach tych wskaźników. Można było na przykład zmienić nazwę “ k ” na

“i” zaś “l” na “j” i wartość sumy nie może zależeć od zmiany “nazewnictwa”. A potem można znów zmienić nazwy z “i” na “l” oraz z “j” na “k” i znów nic nie mogło się zmienić. A zatem interpretacja “czynna” zamiany wskaźników (jako ich *przestawianie*) daje zamianę znaku na przeciwny, zaś interpretacja “bierna” tej samej operacji (jako ich *przemianowanie*) nie zmienia znaku wyrażenia. A zatem

$$f_{kl}d\tau^k \wedge d\tau^l = -f_{kl}d\tau^k \wedge d\tau^l = 0 .$$

Ostatecznie więc

$$\begin{aligned} \widetilde{d\alpha_{(m)}} &= \frac{1}{m!} d\alpha_{i_1, \dots, i_m} \wedge \left(\frac{\partial \tau^{i_1}}{\partial \eta^{k_1}}, \dots, \frac{\partial \tau^{i_m}}{\partial \eta^{k_m}} \right) d\eta^{k_1} \wedge \dots \wedge d\eta^{k_m} \\ &= \frac{1}{m!} d\alpha_{i_1, \dots, i_m} \wedge d\tau^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tau^{i_m} = d\alpha_{(m)} . \end{aligned}$$

A zatem nasz wzór na różniczkę zewnętrzną – mimo, że pozornie zależy od wyboru układu współrzędnych – naprawdę od tego wyboru nie zależy. Może zatem służyć nawet jako definicja operatora d.

Przy pomocy tego wzoru możemy też wyprowadzić – niezależne od jakiegokolwiek układu współrzędnych – wyrażenie pozwalające obliczyć wartość $(m+1)$ -formy $d\alpha_{(m)}$ na układzie $(m+1)$ pól wektorowych $(X_{(0)}, X_{(1)}, \dots, X_{(m)})$:

Twierdzenie.

$$\begin{aligned} &< d\alpha_{(m)}; X_{(0)}, X_{(1)}, \dots, X_{(m)} > \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i X_{(i)} (< \alpha_{(m)}; X_{(0)}, X_{(1)}, \dots, X_{(i-1)}, X_{(i+1)}, \dots, X_{(m)} >) + \sum_{0 \leq i < j \leq m} (-1)^{i+j} \times \\ &\times < \alpha_{(m)}; [X_{(i)}, X_{(j)}], X_{(0)}, X_{(1)}, \dots, X_{(i-1)}, X_{(i+1)}, \dots, X_{(j-1)}, X_{(j+1)}, \dots, X_{(m)} > . \end{aligned}$$

Dowód tego twierdzenia polega na wyliczeniu wartości wszystkich trzech wyrażeń w dowolnym układzie współrzędnych. Najłatwiej rozpocząć od pierwszego wyrazu po prawej stronie równości, który umiemy zapisać przy pomocy współrzędnych formy i współrzędnych naszych wektorów. Różniczkowanie tego wyrażenia względem pól $X_{(i)}$ daje dwa rodzaje członów: gdy różniczkowanie “uderza” na współczynniki α_{i_1, \dots, i_m} , otrzymujemy właśnie współczynniki formy $d\alpha_{(m)}$; gdy natomiast różniczkowanie “uderza” na składowe pól $X_{(j)}$, otrzymujemy “niechciane” człony, które jednak upraszczają się dokładnie z wyrażeniem zawierającym komutator $[X_{(i)}, X_{(j)}]$ tych pól. Sprawdzenie, że istotnie tak się dzieje pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Powyższe wyrażenie można byłoby przyjąć jako definicję operatora d. Łatwo wykazać, że wynikają z niej wszystkie własności, które poznaliśmy do tej pory.

Ćwiczenie. 1. W przestrzeni trójwymiarowej, przy współrzędnych (x, y, z) bierzemy formy:

$$\alpha_{(2)} = \sin(x^2 z) dx \wedge dy + 2xy dy \wedge dz - dz \wedge dx$$

$$\alpha_{(1)} = \sinh(y^2 z) dx + xyz dy - e^{zx} dz$$

Obliczyć $d\alpha$.

$$\begin{aligned} d\alpha_{(2)} &= [2xz \cos(x^2 z) dx + x^2 \cos(x^2 z) dz] \wedge dx \wedge dy + [2y dx + 2x dy] \wedge dy \wedge dz = \\ &= x^2 \cos(x^2 z) dz \wedge dx \wedge dy + 2y dx \wedge dy \wedge dz = \end{aligned}$$

$$= (x^2 \cos(x^2 z) + 2y) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\begin{aligned} d\alpha_{(1)} &= 2yz \cosh(y^2 z) dy \wedge dx + y^2 \cosh(y^2 z) dz \wedge dx + yz dx \wedge dy + \\ &+ xy dz \wedge dy - ze^{zx} dx \wedge dz = \end{aligned}$$

$$= (yz - 2yz \cosh(y^2 z)) dx \wedge dy + (y^2 \cosh(y^2 z) + ze^{zx}) dz \wedge dx + yz dx \wedge dy$$

Obliczyć $dd\alpha_{(1)}$

$$\begin{aligned} dd\alpha_{(1)} &= (y - 2y \cosh(y^2 z) - 2y^3 z \sinh(y^2 z)) dx \wedge dy \wedge dz + \\ &+ (2y \cosh(y^2 z) + 2y^3 z \sinh(y^2 z)) dx \wedge dy \wedge dz + y dx \wedge dy \wedge dz = 0 \end{aligned}$$

Ćwiczenie. 2. Przestrzeń czterowymiarowa, mamy formę (log oznacza logarytm naturalny):

$$\alpha_{(1)} = \log(y^2 + x^2) dt + xz dy$$

Policzyć $d\alpha_{(1)}$ i $dd\alpha_{(1)}$:

$$d\alpha_{(1)} = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} dy + \frac{2x}{x^2 + y^2} dx \right) \wedge dt + (z dx + x dz) \wedge dy =$$

$$= \frac{2y}{x^2 + y^2} dy \wedge dt + \frac{2x}{x^2 + y^2} dx \wedge dt + z dx \wedge dy + x dz \wedge dy$$

$$dd\alpha_{(1)} = -\frac{2x2y}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy \wedge dt - \frac{2x2y}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx \wedge dt +$$

$$+ dz \wedge dx \wedge dy + dx \wedge dz \wedge dy = 0$$

Ćwiczenie. 3. Zpiszmy formę z ćwiczenia 1 we współrzędnych sferycznych:

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$dx = \sin(\theta) \cos(\varphi) dr + r \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta - r \sin(\theta) \sin(\varphi) d\varphi$$

$$dy = \sin(\theta) \sin(\varphi) dr + r \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + r \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi$$

$$dz = \cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta$$

$$\begin{aligned}
dy \wedge dz &= r \sin(\varphi) d\theta \wedge dr + r \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\varphi) d\varphi \wedge dr - r^2 \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi \wedge d\theta \\
dz \wedge dx &= r \cos(\varphi) dr \wedge d\theta - r \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) dr \wedge d\varphi + r^2 \sin^2(\theta) \sin(\varphi) d\theta \wedge d\varphi \\
dx \wedge dy &= r \sin^2(\theta) dr \wedge d\varphi + r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \wedge d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{(2)} &= \sin(r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) r \cos(\theta)) [r \sin^2(\theta) dr \wedge d\varphi + r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \wedge d\varphi] \\
&+ 2r^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) (r \sin(\varphi) d\theta \wedge dr + r \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\varphi) d\varphi \wedge dr + \\
&- r^2 \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi \wedge d\theta) + r \sin(\varphi) dr \wedge d\theta + r \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\varphi) dr \wedge d\varphi \\
&- r^2 \sin(\theta) \cos(\varphi) d\theta \wedge d\varphi
\end{aligned}$$

5. Całkowanie form różniczkowych

Formy różniczkowe stopnia r służą do całkowania po r -wymiarowych “powierzchniach z brzegiem”. Możliwe są tutaj różne poziomy ogólności wykładu. My pozostaniemy na prostym, intuicyjnym poziomie i będziemy dopuszczali “do konkurencji” takie powierzchnie, które można zdefiniować w dowolnej rozmaitości M skończoną ilością równości i nierówności *regularnych*:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1(x) = 0 \\ \vdots \\ G_p(x) = 0 \\ H_1(x) \leq 0 \\ \vdots \\ H_s(x) \leq 0 \end{array} \right.$$

Definicja. Powierzchnią regularną (z brzegiem) $D \subset M$ wymiaru r będziemy nazywali zbiór punktów rozmaitości M , spełniających powyższy regularny układ warunków, przy czym:

- 1) wymiar r oznacza, że $r + p = m$ (m jest wymiarem rozmaitości M),
- 2) “regularność” oznacza, że w każdym punkcie $x \in D$ różniczki wszystkich funkcji G_i oraz tych spośród H_j , które zerują się w x , są liniowo niezależne.

Ścianą S_j takiej powierzchni regularnej nazywamy powierzchnię regularną wymiaru $r - 1$, określoną takim układem warunków, który powstał z układu definiującego D poprzez zamianę jednej z nierówności ograniczających $H_j \leq 0$ na równość definiującą $H_j = 0$.

Brzegiem ∂D powierzchni regularnej D nazywamy sumę jej wszystkich ścian. Okazuje się jednak za chwilę, że do całkowania form różniczkowych po powierzchniach będziemy musieli uwzględnić jeszcze jedną, dodatkową strukturę, zwaną *orientacją*. Okazuje się przy tym, że każda ściana S powierzchni zorientowanej D jest też zorientowana, bowiem dziedziczy orientację z powierzchni-matki D . W dalszym ciągu symbolem ∂D będziemy oznaczali sumę tych rozmaitości *zorientowanych*.

Zanim jednak zdefiniujemy co to jest orientacja powierzchni r -wymiarowej, spróbujmy naiwnie określić całkę z r -formy po takiej powierzchni. Właśnie analiza poprawności tej operacji doprowadzi nas w naturalny sposób do odkrycia pojęcia orientacji.

Pierwsze przybliżenie definicji: Całką z r -formy różniczkowej ω po r -wymiarowej dziedzinie regularnej D nazywamy liczbę $\int_D \omega$ uzyskaną w następujący sposób: należy wybrać dowolną lokalną parametryzację (układ współrzędnych) (t^1, \dots, t^r) na powierzchni D .

Jeśli forma ω znika poza dziedziną tego układu współrzędnych, to jako wartość definiowanej całki kładziemy

$$\int_D \omega := \int_{\tilde{D}} \left\langle \omega; \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^r} \right\rangle d^r t ,$$

przy czym $\tilde{D} \subset R^r$ oznacza zakres zmienności parametrów (τ^i) , odpowiadający dziedzinie używanego układu współrzędnych na powierzchni D . Jeżeli tak nie jest, to wybieramy pokrycie skończone powierzchni D dziedzinami lokalnych układów współrzędnych, wpisujemy weń rozkład jedności (φ_i) a następnie całkujemy formy $\omega_i = \varphi_i \omega$ według powyższej recepty, korzystając z faktu, że każda ω_i ma nośnik zawarty już w dziedzinie jakiegoś układu współrzędnych.

Musimy teraz pokazać, że ta definicja nie zależy od wyboru układów współrzędnych, którymi się posłużymy do liczenia całki. Zaczniemy od najprostszego przypadku jednej całki. Jeśli w powyższym wzorze użyjemy innej parametryzacji (τ^1, \dots, τ^r) i odpowiadającego jej zakresu zmienności parametrów $\tilde{D} \subset R^r$, to możemy skorzystać z możliwości wyrażenia wektorów $\frac{\partial}{\partial \tau^i}$ jako kombinacji liniowej wektorów starej bazy, tzn. wektorów $\frac{\partial}{\partial t^j}$. Otrzymujemy w ten sposób:

$$\int_{\tilde{D}} \left\langle \omega; \frac{\partial}{\partial \tau^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tau^r} \right\rangle d^r \tau = \int_{\tilde{D}} \frac{\partial t^{i_1}}{\partial \tau^1}, \dots, \frac{\partial t^{i_r}}{\partial \tau^r} \left\langle \omega; \frac{\partial}{\partial t^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^{i_r}} \right\rangle d^r \tau .$$

Wyrażenie to znika automatycznie, gdy któreś dwa spośród wskaźników (i_1, \dots, i_r) są sobie równe. Wystarczy zatem sumować jedynie te wyrażenia, dla których $i_k = \sigma(k)$, gdzie σ jest permutacją zbioru pierwszych r liczb naturalnych. Z antysymetrii formy różniczkowej wynika tożsamość

$$\left\langle \omega; \frac{\partial}{\partial t^{\sigma(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^{\sigma(r)}} \right\rangle = (-1)^{|\sigma|} \left\langle \omega; \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^r} \right\rangle .$$

Poza tym mamy:

$$\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \frac{\partial t^{\sigma(1)}}{\partial \tau^1}, \dots, \frac{\partial t^{\sigma(r)}}{\partial \tau^r} = \det\left(\frac{\partial t^i}{\partial \tau^j}\right) .$$

A zatem

$$\int_{\tilde{D}} \left\langle \omega; \frac{\partial}{\partial \tau^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tau^r} \right\rangle d^r \tau = \int_{\tilde{D}} \det\left(\frac{\partial t^i}{\partial \tau^j}\right) \left\langle \omega; \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^r} \right\rangle d^r \tau .$$

Ale

$$\left| \det\left(\frac{\partial t^i}{\partial \tau^j}\right) \right| d^r \tau = d^r t ,$$

wobec tego możemy skorzystać z twierdzenia o zamianie zmiennych:

$$\int_{\tilde{D}} \left\langle \omega; \frac{\partial}{\partial \tau^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tau^r} \right\rangle d^r \tau = \operatorname{sgn} \det\left(\frac{\partial t^i}{\partial \tau^j}\right) \int_{\tilde{D}} \left\langle \omega; \frac{\partial}{\partial t^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t^r} \right\rangle d^r t ,$$

gdzie przez “sgn” oznaczyliśmy znak wyznacznika macierzy Jacobi’ego (czyli *Jacobianu*). Widzimy zatem, że wyrażenie definiujące całkę z formy ω daje tę samą wartość gdy liczymy je w dwu różnych układach współrzędnych pod warunkiem, że *Jacobian* macierzy przejścia od jednego do drugiego układu jest dodatni.

Definicja. Rozmaitością zorientowaną nazywamy taką rozmaitość, której atlas ma następującą własność: *Jacobian* transformacji między dwiema mapami należącymi do tego atlasu jest zawsze dodatni.

W praktyce chodzi o to, że na rozmaitości zorientowanej można wyróżnić dwie klasy map: takie, dla których *Jacobian* transformacji do dowolnej mapy należącej do atlasu definiującego orientację jest dodatni i takie, dla których jest on ujemny. Mapy należące do pierwszej klasy nazywamy *zgodnymi* z orientacją, a drugiego rodzaju – *niezgodnymi* z orientacją. Jeśli jednak mamy mapę tego drugiego rodzaju, to bardzo łatwo zamieniając kolejność jakichkolwiek dwu współrzędnych otrzymać mapę pierwszego rodzaju. Np. mapy (x, y, z) oraz (r, θ, φ) definiują w przestrzeni euklidesowej E^3 tę samą “prawoskrętną” orientację. Natomiast mapy (y, x, z) oraz (r, φ, θ) czy też (φ, θ, r) definiują orientację “lewoskrętną”.

Istnieją rozmaitości *nieorientowalne*, to znaczy takie, na których *nie udaje się* wybrać żadnej orientacji. Przykładem jest “wstęga Möbiusa”. Gdyby chcieć zacząć budować orientację, to można ją wybrać lokalnie, w małym kawałku. Dodając mapy tak, by *Jacobian* przejścia do poprzednio wybranych map był dodatni, można uzyskiwać coraz większe ich kolekcje. Nie uda się jednak uzyskać *atlasu*, bowiem próba pokrycia całej wstęgi Möbiusa zakończy się tym, że w jakimś kawałku *Jacobian* przejścia będzie musiał być ujemny.

Definicja. Całką z r -formy ω po powierzchni *zorientowanej* D nazywamy liczbę $\int_D \omega$ zdefiniowaną powyżej, ale obliczoną przy użyciu jedynie takich parametryzacji, które są *zgodne* z orientacją.

Nasze dotychczasowe rachunki dowodzą, że teraz całka nie zależy już od wyboru parametryzacji (w klasie parametryzacji zgodnych z orientacją).

Twierdzenie Stokesa. Dla dowolnej zorientowanej powierzchni z brzegiem $D_{(m+1)}$ wymiaru $m + 1$ oraz dowolnej m -formy różniczkowej $\alpha_{(m)}$ zachodzi następująca równość:

$$\int_{D_{(m+1)}} d\alpha_{(m)} = \int_{\partial D_{(m+1)}} \alpha_{(m)} ,$$

gdzie $\partial D_{(m+1)}$ jest brzegiem rozmaitości $D_{(m+1)}$, czyli kolekcją wszystkich jej zorientowanych ścian. Orientacja tych ścian jest *odziedziczona* po orientacji samej rozmaitości $D_{(m+1)}$ zgodnie z następującą definicją:

Definicja. Jeśli $D_{(m+1)}$ jest rozmaitością zorientowaną zaś S_j jej ścianą odpowiadającą nierówności $H_j \leq 0$, to orientacją S_j odziedziczoną po $D_{(m+1)}$ nazywamy atlas składający się z map (τ^1, \dots, τ^m) mających następującą własność: mapa $(H_j, \tau^1, \dots, \tau^m)$ jest zgodna z orientacją $D_{(m+1)}$.

Idea Dowodu Twierdzenia Stokesa. Rozważamy $(m + 1 + p)$ -wymiarową rozmaitość M w której “żyją” obiekty $D_{(m+1)}$ i $\alpha_{(m)}$ (p jest ilością równań definiujących powierzchnię D – patrz definicja). Jeśli w otoczeniu punktu $x \in D$ wybierzemy parametryzację $(\tau^1, \dots, \tau^{m+1})$ powierzchni D , to kładąc $y^1 := G_1, \dots, y^p := G_p$ otrzymujemy

lokalną mapę $(\tau^1, \dots, \tau^{m+1}, y^1, \dots, y^p)$ w rozmaitości M . Współrzędne y^k są stałe na D . Jeśli zatem wyrazimy formę $\alpha_{(m)}$ w języku tych współrzędnych, to do całkowania po D i jej brzegu wkład wniosą jedynie człony nie zawierające różniczek dy^k . Będziemy zatem całkowali sumę wyrażeń postaci $\omega_i = f d\tau^1 \wedge \dots \wedge d\tau^{i-1} \wedge d\tau^{i+1} \wedge \dots \wedge d\tau^{m+1}$ (i -ty wyraz został opuszczony). Mamy jednak:

$$d\omega_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial \tau^i} d\tau^1 \wedge \dots \wedge d\tau^{m+1} .$$

Gdyby forma $\alpha_{(m)}$ – a zatem i funkcja f – miała nośnik w dziedzinie rozważanej mapy i gdyby ta dziedzina leżała we wnętrzu powierzchni D (to znaczy gdyby nie zawierała ona punktów należących do brzegu ∂D) wtedy teza twierdzenia byłaby trywialnie spełniona. Istotnie, w tym przypadku forma $\alpha_{(m)}$ znikałaby tożsamościowo na brzegu a zatem jej całka po brzegu byłaby równa zero. Z drugiej strony całkowanie $d\alpha_{(m)}$ po D sprowadzałoby się do całkowania powyższych wyrażeń postaci $d\omega_i$. Ale całka z pochodnej funkcji f jest równa różnicy wartości samego f w granicach całkowania. Jeśli zatem funkcja f ma nośnik w dziedzinie naszej mapy, to znaczy że znika na końcach obszaru całkowania. W ten sposób również całka z $d\alpha_{(m)}$ po D byłaby równa zero jako prosta konsekwencja faktu, iż całka z pochodnej jest równa przyrostowi samej funkcji.

Rozważymy teraz sytuację nieco ogólniejszą, taką mianowicie, że nasza mapa “zaha-
cza” o i -tą ścianę S_j brzegu ∂D . Wtedy wybierając naszą mapę możemy jako pierwszą współrzędną wybrać właśnie funkcję H_j definiującą naszą ścianę, tzn. możemy położyć:

$$\tau^1 := H_j .$$

Oznacza to, że punkty powierzchni D spełniają – obok równania $y^k = 0$ – jeszcze nierówność $\tau^1 \leq 0$. Całkując wyrażenia $d\omega_i$ po D widzimy, że i teraz otrzymamy tożsamościowo zero dla $i \neq 1$ na mocy identycznego jak poprzednio argumentu. Jedynie całkując wyrażenie $d\omega_1$ otrzymamy niezerowy wynik. Bierze się on stąd, że górna granica całkowania po $d\tau^1$ jest równa zero, co odpowiada właśnie punktom rozważanej ściany. Po wykonaniu całkowania otrzymujemy zatem wartość funkcji f na tej ścianie (wkład od dolnej granicy znów znika bowiem założyliśmy że ω_i ma nośnik w rozważanej dziedzinie). Do obliczenia żądanej całki pozostało jeszcze wycalkować f po zmiennych $(\tau^2, \dots, \tau^{m+1})$. Ale ta całka to właśnie całka z ω_1 po rozważanej ścianie. A zatem i w tym przypadku otrzymaliśmy twierdzenie Stokesa jako prostą konsekwencję podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego.

Wykazaliśmy zatem twierdzenie w przypadku, gdy dzięki zręcznemu wyborowi współrzędnych udało nam się sprowadzić problem do całkowania po półprzestrzeni R^{m+1} danej równaniem $\tau^1 \leq 0$, przy czym powierzchnia $\tau^1 = 0$ jest właśnie jej brzegiem. Podobny wynik otrzymamy, gdy rozważać będziemy “kąty” dany w R^{m+1} nie jedną a kilkoma nierównościami $\tau^i \leq 0$.

Ogólny przypadek sprowadzamy do takich właśnie “modelowych” sytuacji przy pomocy następującego triku. W otoczeniu każdego punktu $x \in D$ wybieramy parametryzację o rozważanych wyżej własnościach, tzn. taką, że zarówno funkcje G_i jak i funkcje H_j definiujące D są równe kolejnym współrzędnym. Gdy tylko $\alpha_{(m)}$ ma nośnik w dziedzinie którejś z tych parametryzacji, twierdzenie – jak pokazaliśmy – jest prawdziwe. W ogólnym

przypadku z pokrycia całego D takimi dziedzinami możemy wybrać pokrycie skończone i odpowiadający mu rozkład jedności:

$$1 = \sum_{r=1}^N \varphi_r(x)$$

gdzie każda z funkcji φ_r ma nośnik w dziedzinie którejś z rozważanych “dobrych” parametryzacji. Mamy jednak

$$\alpha_{(m)} = \sum_{r=1}^N \beta_r$$

gdzie forma

$$\beta_r := \alpha_{(m)} \varphi_r$$

ma już dobry, “mały” nośnik i możemy do niej stosować argumenty przytoczone powyżej. To kończy dowód twierdzenia.

Przykład Jeśli mamy orientację daną w R^3 prawoskrętnym układem współrzędnych kartezjańskich (x, y, z) i przechodzimy do układu współrzędnych sferycznych (r, θ, φ) to w celu upewnienia się, czy nowa mapa niesie tę samą orientację musimy sprawdzić znak jacobianu przejścia:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2 \sin(\theta) > 0$$

gdzie

$$f_1 = x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$f_2 = y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$f_3 = z = r \cos(\theta)$$

A zatem orientacja (r, θ, φ) jest zgodna z orientacją (x, y, z) .

Ćwiczenie. 4. Sprawdźmy na przykładzie czy działa wzór Stokesa w przestrzeni czterowymiarowej, opisanej współrzędnymi (t, x, y, z) . Weźmy dwuformę i powierzchnię:

$$\alpha_{(2)} = (x^2 + y^2 + z^2)dx \wedge dy - xydy \wedge dz + \cosh(xy^2z)dt \wedge dx$$

$$\Omega = \begin{cases} t = 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Wybieramy orientację lewoskrętną (x, z, y) .

$$\begin{aligned} d\alpha_{(2)} &= 2zdz \wedge dx \wedge dy - ydx \wedge dy \wedge dz + 2xyz \sinh(xy^2z)dy \wedge dt \wedge dx + \\ &+ xy^2 \sinh(xy^2z)dz \wedge dt \wedge dx = \\ &= (2z - y)dz \wedge dx \wedge dy + 2xyz \sinh(xy^2z)dy \wedge dt \wedge dx + xy^2 \sinh(xy^2z)dz \wedge dt \wedge dx \end{aligned}$$

Lewa strona przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(3)} d\alpha_{(2)} &= \int \int \int \langle d\alpha_{(2)}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle dx dy dz = \\ &= \int \int \int (2z - y) \langle dz \wedge dx \wedge dy; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle dx dy dz = \\ &= \int \int \int (y - 2z) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{(1-x^2)}} dy (y - 2z) = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Całkę z prawej strony

$$\int_{\partial\Omega(3)} \alpha_{(2)}$$

liczymy po ścianach:

$$\begin{cases} z = 1 & (S_1) \\ z = 0 & (S_2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (S_3) \\ y = 0 & (S_4) \end{cases}$$

$$\partial\Omega(3) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

Całka liczona po ścianie S_1 i S_2 zarazem dają łatwy rachunek:

$$\int_{S_1+S_2} \alpha = - \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{(1-x^2)}} dy = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = \rho \cos(\varphi)$$

$$y = \rho \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\int_{S_3} \alpha = \int dz \int d\varphi \langle \alpha; \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \rangle =$$

$$= \int dz \int d\varphi \langle \alpha; \frac{\partial}{\partial z}, x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \rangle =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^\pi x^2 y d\varphi = \frac{2}{3}$$

$$\int_{S_4} = 0$$

Czyli $\int_{\partial\Omega(3)} \alpha_{(2)} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}$

Ćwiczenie. 5. Obliczyć całkę z dwuformy $\alpha_{(2)} = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$ po powierzchni bryły, której sciany są opisane przez równania:

$$\begin{cases} S_1 : & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ S_2 : & z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} \alpha &= \int \int \left\langle \alpha; \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 0 \\
\int_{S_1} \alpha &= \int \int \left\langle \alpha; \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle \\
&= \left\langle \alpha; z \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + z \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial z}, x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \\
&= -x^2 \sqrt{x^2 + y^2} \left\langle dy \wedge dz; \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = x^2 \sqrt{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z} = z \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + z \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} . \\
\int_{S_1} \alpha &= \int \int \left\langle \alpha; \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} x^2 \sqrt{x^2 + y^2} d\varphi = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} r^3 \sin^3(\theta) \cos^2(\varphi) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta r^3 \sin^3(\theta) \pi = \frac{\pi^2}{2} \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right)
\end{aligned}$$

Ćwiczenie. 6. Wyrazić we współrzędnych sferycznych formę różniczkową:

$$\alpha_{(2)} = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\theta)$$

$$dy \wedge dz = r \sin(\varphi) d\theta \wedge dr + r \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\varphi) d\varphi \wedge dr - r^2 \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi \wedge d\theta$$

$$dz \wedge dx = r \cos(\varphi) dr \wedge d\theta - r \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi) dr \wedge d\varphi + r^2 \sin^2(\theta) \sin(\varphi) d\theta \wedge d\varphi$$

$$dx \wedge dy = r \sin^2(\theta) dr \wedge d\varphi + r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \wedge d\varphi$$

$$\alpha_{(2)} = r^3 \sin(\theta) d\theta \wedge d\varphi$$

Ćwiczenie. 7. Sprawdźmy wzór Stokesa dla formy $\alpha_{(1)} = xdy$ oraz powierzchni dwuwymiarowej $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Weźmy parametryzację

$$\begin{cases} x = \tau_1 \\ y = \tau_2 \\ z = \sqrt{1 - \tau_1^2 - \tau_2^2} \end{cases} \quad (\tau_1, \tau_2) \in K(0, 1)$$

Mamy:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau_1} &= \frac{\partial x}{\partial \tau_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \tau_1} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \tau_1} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2\tau_1}{2\sqrt{1 - \tau_1^2 - \tau_2^2}} \frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial \tau_2} &= \frac{\partial x}{\partial \tau_2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \tau_2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \tau_2} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2\tau_2}{2\sqrt{1 - \tau_1^2 - \tau_2^2}} \frac{\partial}{\partial z} .
\end{aligned}$$

A zatem

$$\int_D d\alpha_{(1)} = \int_{K(0,1)} \left\langle dx; \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right\rangle d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$\int_{-1}^1 d\tau_1 \int_{-\sqrt{1-\tau_1^2}}^{\sqrt{1-\tau_1^2}} d\tau_2 \left\langle dx \wedge dy; \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right\rangle = \int_{-1}^1 d\tau_1 \int_{-\sqrt{1-\tau_1^2}}^{\sqrt{1-\tau_1^2}} d\tau_2 1 = \pi .$$

Teraz scałkujemy po brzegu ∂D . Przyjmujemy podobną parametryzację:

$$\begin{cases} x = \tau_1 \\ y = \tau_2 \\ z = 0 \\ \tau_1^2 + \tau_2^2 = 1 \end{cases}$$

Otrzymujemy dwa odcinki łuku

$$1) \begin{cases} x = \tau \\ y = \sqrt{1-\tau^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = \tau \\ y = -\sqrt{1-\tau^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

W pierwszym przypadku τ przebiega odcinek od -1 do $+1$ a w drugim – odwrotnie. Zatem ostatecznie:

$$\int_{\partial D} \alpha_{(1)} = \int_{\partial D} x dy = \int_1^{-1} \tau \frac{-\tau d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \int_{-1}^1 \tau \frac{\tau d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 2 \int_{-1}^1 \frac{\tau^2 d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \pi$$

Ćwiczenie. 8. Weźmy dwa wektory v, w . Okazuje się, że wartość formy $dx \wedge dy$ na tych wektorach jest równa składowej z ich iloczynu wektorowego. Rzeczywiście, oznaczając:

$$v = v^x \frac{\partial}{\partial x} + v^y \frac{\partial}{\partial y} + v^z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$w = w^x \frac{\partial}{\partial x} + w^y \frac{\partial}{\partial y} + w^z \frac{\partial}{\partial z}$$

otrzymujemy :

$$\begin{aligned} & \left\langle dx \wedge dy; v^x \frac{\partial}{\partial x} + v^y \frac{\partial}{\partial y} + v^z \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle w^x + \\ & + \left\langle dx \wedge dy; v^x \frac{\partial}{\partial x} + v^y \frac{\partial}{\partial y} + v^z \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle w^y + \\ & + \left\langle dx \wedge dy; v^x \frac{\partial}{\partial x} + v^y \frac{\partial}{\partial y} + v^z \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle w^z = \\ & = \left\langle dx \wedge dy; \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle w^x v^y + \left\langle dx \wedge dy; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle w^y v^x \\ & = v^x w^y - w^x v^y . \end{aligned}$$

Oczywiście, biorąc cykliczną permutację zmiennych (x, y, z) możemy wyrazić składową x iloczynu wektorowego przez działanie formy $dy \wedge dz$ oraz składową y iloczynu wektorowego przez działanie formy $dz \wedge dx$ na wektory v, w .

6. Lemat Poincaré

Jeśli $\beta = d\alpha$ to formę β nazywamy *zupelną* zaś formę α nazywamy potencjałem albo *formą pierwotną* dla formy β . Z tożsamości $dd = 0$ wynika, że jedynie formy zamknięte mają szansę na bycie zupełnymi. Innymi słowy: warunek $d\beta = 0$ jest warunkiem koniecznym rozwiązalności równania różniczkowego $\beta = d\alpha$ na formę α . Zachodzi pytanie czy jest to również warunek dostateczny, tzn. czy każda forma zamknięta jest zupełna? Poniższe przykłady pokazują że tak nie jest.

Ćwiczenie. 9. W przestrzeni $R^2 - \{0\}$ (płaszczyzna z usuniętym początkiem układu współrzędnych) weźmy formę różniczkową:

$$\alpha_{(1)} := \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx .$$

Jest to forma zamknięta, bowiem mamy:

$$\begin{aligned} d\alpha_{(1)} &= \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{1}{(x^2 + y^2)} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{2}{(x^2 + y^2)} - \frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Spróbujmy znaleźć potencjał tej formy, tzn. funkcję, której ona byłaby różniczką. Wybierzmy dowolny punkt \mathbf{a} , ale różny od $(0, 0)$, bowiem w tym punkcie forma nie jest dobrze określona. Spróbujmy zdefiniować funkcję $U(\mathbf{x})$ wzorem:

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \alpha_{(1)} .$$

Gdyby taka funkcja istniała, to na mocy tw. Stokesa byłaby właśnie potencjałem formy $\alpha_{(1)}$. A będzie ona istniała wtedy, gdy całka nie zależy od drogi γ łączącej \mathbf{a} z \mathbf{x} . Weźmy dwie takie drogi: γ_1 i γ_2 . Ich różnica jest brzegiem pewnej powierzchni $\partial\mathcal{O} = \gamma_2 + (-\gamma_1)$. A zatem możemy napisać:

$$\int_{\gamma_2} \alpha_{(1)} - \int_{\gamma_1} \alpha_{(1)} = \int_{\partial\mathcal{O}} \alpha_{(1)} = \int_{\mathcal{O}} d\alpha_{(1)} = 0 .$$

Powyższy wzór zawiera jednak poważny błąd: jeśli punkt $(0, 0)$ należałby do obszaru \mathcal{O} (tzn. byłoby $(0, 0) \in \mathcal{O}$), to forma $\alpha_{(1)}$ oraz – oczywiście – jej różniczką $d\alpha_{(1)}$ nie są dobrze określone, a zatem wzór nie może być zastosowany. Widzimy zatem, że potencjał U może być skonstruowany jedynie *lokalnie*, w otoczeniu punktu odniesienia \mathbf{a} a próba jego globalnego rozszerzenia musi prowadzić do jakiejś sprzeczności. Do jakiej? przekonajmy się o tym w bezpośrednim rachunku.

Wybierzmy np. $\mathbf{a} = (1, 0)$. Do celów rachunku oznaczmy $\mathbf{x} = (x_0, y_0)$, rezerwując sobie symbol (x, y) na oznaczenie współrzędnych bierzącego punktu na krzywej γ , po której będziemy całkowali.

Wybierzmy najpierw całkowanie po odcinkach prostych: poziomo od $(1, 0)$ do $(x_0, 0)$ i potem pionowo od $(x_0, 0)$ do (x_0, y_0) . Otrzymujemy:

$$U(\mathbf{x}) = \int_1^{x_0} 0 dx + \int_0^{y_0} \frac{x_0 dy}{x_0^2 + y^2} = \frac{1}{x_0} \int_0^{y_0} \frac{dy}{1 + (\frac{y}{x_0})^2} = \int_0^{\frac{y_0}{x_0}} \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}$$

Widzimy tutaj na czym polega paradoks “wyłącznie lokalnego” istnienia potencjału: funkcja $\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}$ nie daje się przedłużyć do jednoznacznie określonej, *ciągłej* funkcji na $R^2 - \{(0, 0)\}$.

Aby przekonać się o (jedynie lokalnej!) niezależności całkowania od wyboru drogi, scałkujemy po innej drodze. Oznaczmy $r_0 := \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Niech γ składa się z poziomego odcinka od $(1, 0)$ do $(r_0, 0)$ a następnie z wycinka okręgu o promieniu r_0 , łączącego punkt $(r_0, 0)$ z punktem (x_0, y_0) . Zamieniamy także współrzędne kartezjańskie na współrzędne biegunowe.

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) & y &= r \sin(\varphi) \\ dy &= \sin(\varphi) dr + r \cos(\varphi) d\varphi \\ dx &= \cos(\varphi) dr - r \sin(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$U(\mathbf{x}) = \int_1^{\sqrt{x^2+y^2}} 0 dr + \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} d\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0} .$$

W celach “treningowych” scałkujemy po prostej łączącej \mathbf{a} z \mathbf{x} , tzn. po prostej danej równaniem

$$y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1) ,$$

którą parametryzujemy zmienną τ :

$$\begin{cases} x = 1 + \tau(x_0 - 1) & \tau \in (0, 1) \\ y = \tau y_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \frac{(1 + \tau(x_0 - 1))y_0 - \tau y_0(x_0 - 1)}{\tau^2 y_0^2 + 1 + \tau^2(x_0 - 1)^2 + 2\tau(x_0 - 1)} d\tau = \\ &= \int_0^1 \frac{y_0}{\tau^2(y_0^2 + (x_0 - 1)^2) + 2\tau(x_0 - 1) + 1} d\tau \end{aligned}$$

oznaczmy teraz $\rho^2 = (y_0)^2 + (x_0 - 1)^2$. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \frac{y_0}{\rho^2(\tau + \frac{x_0-1}{\rho^2})^2 - \frac{(x_0-1)^2}{\rho^2} + 1} d\tau = \frac{y_0}{\rho^2} \int_0^1 \frac{d\tau}{(\tau + \frac{x_0-1}{\rho^2})^2 + \frac{y_0^2}{\rho^4}} = \\ &= \frac{\rho^2}{y_0} \int_0^1 \frac{d\tau}{\frac{\rho^4}{y_0^2}(\tau + \frac{x_0-1}{\rho^2})^2 + 1} = \end{aligned}$$

Podstawmy $t = \frac{\rho^2}{y_0}\tau + \frac{x_0-1}{y_0}$ i konsekwentnie $dt = d\tau \frac{\rho^2}{y_0}$. Otrzymujemy ostatecznie:

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\frac{x_0-1}{y_0}}^{\frac{\rho^2}{y_0} + \frac{x_0-1}{y_0}} \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} \frac{\rho^2 + x_0 - 1}{y_0} - \operatorname{arctg} \frac{x_0 - 1}{y_0} .$$

I tym razem – stosując trygonometryczne wzory na tangens różnicy kątów – możemy pokazać, że wynik całkowania jest identyczny jak w poprzednich obliczeniach.

Ćwiczenie. 10. W przestrzeni $R^3 - \{0\}$ (przestrzeń z usuniętym początkiem układu współrzędnych) weźmy formę różniczkową:

$$\omega_{(2)} := \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Łatwo sprawdzić, że jest to forma zamknięta: $d\omega_{(2)} = 0$. Na mocy ćwiczenia 6-tego łatwo ją przeliczyć do współrzędnych sferycznych. Otrzymujemy natychmiast

$$\omega_{(2)} = \sin(\theta) d\theta \wedge d\varphi .$$

A zatem na powierzchni sfery jednostkowej forma ta redukuje się do formy dwuwymiarowej objętości

$$\omega_{(2)} = \sqrt{\det g} d\theta \wedge d\varphi = \sin(\theta) d\theta \wedge d\varphi .$$

Czy istnieje “potencjał wektorowy” dla formy $\omega_{(2)}$, tzn. taka $\omega_{(1)}$, że zachodzi $d\omega_{(1)} = \omega_{(2)}$? Możemy się o tym przekonać w następujący sposób: całka po sferze z formy objętości daje objętość (dwuwymiarową), czyli liczbę 4π . Ale

$$4\pi = \int_{S^2} \omega_{(2)} \neq \int_{S^2} d\omega_{(1)} = \int_{\partial S^2} \omega_{(1)} = 0$$

bowiem brzeg sfery ∂S^2 znika. Widzimy, że globalnie nie może istnieć potencjał dla formy objętości. Istnieją jednak potencjały lokalne, jak widać z jawnego wzoru na formę objętości w zmiennych sferycznych (θ, φ) , na przykład:

$$\omega_{(1)} = -\cos(\theta)d\varphi ,$$

(nie jest określona globalnie, bo ma osobliwości na biegunach) lub

$$\omega_{(1)} = -\varphi \sin(\theta)d\theta$$

(i znów nieokreślona globalnie, bowiem φ nie jest jednoznacznie określone na całym S^2).

Okazuje się, że sytuacja jak w powyższych przykładach jest typowa. Mówi o tym następujące twierdzenie, zwane ze względu historycznych Lematem Poincaré:

Twierdzenie. Każda forma zamknięta jest lokalnie zupełna.

Globalne istnienie form pierwotnych jest związane z własnościami topologicznym przestrzeni, w której się znajdujemy. Okazuje się, że istnienie form różniczkowych zamkniętych a nie zupełnych (globalnie) wiąże się z istnieniem podrozmaitości o znikającym brzegu, które nie są brzegiem żadnej innej podrozmaitości. I tak istnienie badanej przez nas formy $\alpha_{(1)}$ wiąże się z faktem, że wszystko działo się w przestrzeni $R^2 - \{0\}$. W tej przestrzeni każda krzywa zamknięta otaczająca zero ma znikający brzeg (jest “cyklem”) ale nie jest brzegiem żadnej zwartej podrozmaitości. Podobnie istnienie formy zamkniętej a niezupełnej

$$\omega_{(2)} := \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

w przestrzeni $R^3 - \{0\}$ wiąże się z faktem, że każda powierzchnia zamknięta okrążająca to usunięte z przestrzeni zero ma znikający brzeg (jest “cyklem”) ale nie jest brzegiem żadnej zwartej podrozmaitości. Mocniejsza wersja twierdzenia mówi, że w przestrzeniach, w których nie ma takich patologii (tzn. w których każdy cykl jest brzegiem, lub inaczej: każda podrozmaitość o znikającym brzegu jest brzegiem innej podrozmaitości) każda forma zamknięta jest zupełna.

Formalne podobieństwo obu tych zjawisk wiąże się z tym, że tożsamości $dd = 0$ (różniczka różniczki znika) odpowiada tożsamość $\partial\partial = 0$ (brzeg brzegu znika!).

7. Struktura Riemanna i tensor metryczny

Definicja. Rozmaitość M nosi na sobie strukturę Riemanna (lub metryczną) gdy w każdym jej punkcie $x \in M$ określona jest struktura euklidesowa tzn. iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)_x$ w przestrzeni stycznej $T_x M$ i to w taki sposób, że gdy v i w są gładkimi polami wektorowymi, to ich iloczyn skalarny względem $(\cdot|\cdot)_x$, tzn. funkcja

$$M \ni x \longrightarrow (v_x|w_x) \in R$$

jest gładka.

Jeśli (τ^i) jest lokalną mapą w M (układem współrzędnych) to iloczyn skalarny definiuje w każdym punkcie macierz symetryczną, dodatnio określoną

$$g_{ij}(x) := \left(\frac{\partial}{\partial \tau^i}(x) \middle| \frac{\partial}{\partial \tau^j}(x) \right) .$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial \tau^i}(x)$ są odpowiednimi wektorami bazy wyznaczonej przez ten układ współrzędnych. Pole macierzy g_{ij} nazywa się *tensoriem metrycznym*. Koduje on w sobie pełną informację o strukturze Riemanna, bowiem mamy

$$(v|w) = \left(v^i \frac{\partial}{\partial \tau^i} \middle| w^j \frac{\partial}{\partial \tau^j} \right) = v^i w^j g_{ij} .$$

Przy zamianie układu współrzędnych na (t^r) macierz współrzędnych tensora metrycznego transformuje się w sposób wynikający z praw transformacji wektorów bazy:

$$\tilde{g}_{rs} = \left(\frac{\partial}{\partial t^r} \middle| \frac{\partial}{\partial t^s} \right) = \left(\frac{\partial \tau^i}{\partial t^r} \frac{\partial}{\partial \tau^i} \middle| \frac{\partial \tau^j}{\partial t^s} \frac{\partial}{\partial \tau^j} \right) = \frac{\partial \tau^i}{\partial t^r} \frac{\partial \tau^j}{\partial t^s} g_{ij} .$$

To prawo transformacyjne zawiera tę samą macierz przejścia $\frac{\partial x^i}{\partial x'^i}$ co prawo transformacyjne dla współrzędnych kowektora (“stare współrzędne różniczkowane względem nowych”). Możemy, że g_{ij} jest tensorem *kowariantnym*.

Najprostszym przykładem przestrzeni Riemanna jest przestrzeń euklidesowa (M, g) . W takiej przestrzeni można wybrać prostoliniowy układ współrzędnych i wtedy macierz g_{ij} jest stała: jej współrzędne nie zależą od punktu. Można jeszcze bardziej uprościć ten opis i wybrać współrzędne kartezjańskie. Wtedy odpowiednia baza jest ortonormalna i macierz g_{ij} jest macierzą jednostkową: $g_{ij} = \delta_{ij}$. Możemy jednak posługiwać się tym samym narzędziem jakim jest struktura euklidesowa, używając dowolnie skomplikowanego układu krzywoliniowego. W takim układzie macierz g_{ij} może być bardzo skomplikowana, a jej zależność od punktu rozmaitości tak uwikłana, że na pierwszy rzut oka nie da się wcale rozpoznać zwykłej, płaskiej przestrzeni euklidesowej. Jeśli ktoś da nam taką macierz, której elementy macierzowe są funkcjami na przestrzeni M , to rozstrzygnięcie czy mamy do czynienia z przestrzenią płaską, a zatem czy przy pomocy mądrego wyboru układu współrzędnych możemy sprowadzić tę macierz do delty jest poważnym problemem. Nie będziemy w tym wykładzie uczyli się jak go rozwiązać. Wspomnimy jednakże, iż należy w takim przypadku obliczyć tzw. tensor krzywizny. Nasza przestrzeń jest płaska wtedy i tylko wtedy, gdy ten tensor znika tożsamościowo. Jeśli on nie znika w jakimś punkcie $x \in M$, to żadnym trickiem nie uda się nam sprowadzić macierzy g_{ij} do delty w całym otoczeniu punktu x . Natomiast w izolowanym punkcie zawsze można sprowadzić $g_{ij}(x)$ do delty.

Przykład. W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej E^3 weźmy współrzędne sferyczne (r, θ, φ) . Obliczymy tensor metryczny w tych współrzędnych, czyli macierz iloczynów skalarnych wektorów $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Mamy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z} = r \cos(\theta) \left(\cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \right) - r \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} = r \sin(\theta) \left(-\sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

A zatem

$$\begin{aligned}g_{rr} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \middle| \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \middle| x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = 1\end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy, że wektory bazy są wzajemnie ortogonalne, czyli:

$$\begin{aligned}g_{r\varphi} &= g_{\varphi r} = 0 \\ g_{\varphi\theta} &= g_{\theta\varphi} = 0 \\ g_{r\theta} &= g_{\theta r} = 0\end{aligned}$$

Ponadto otrzymujemy:

$$\begin{aligned}g_{\theta\theta} &= r^2 \\g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2(\theta) .\end{aligned}$$

Macierz g_{ij} ma więc w tych współrzędnych postać:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Przykład. Dowolna rozmaitość zanurzona w przestrzeni euklidesowej $M \subset E$, jest rozmaitością Riemanna. Rzeczywiście, wektory styczne do M możemy przecież traktować jako wektory w E , a zatem ich iloczyn skalarny jest automatycznie określony.

Jako przykład szczegółowy rozważymy sferę $S^2(R)$ o ustalonym promieniu R w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Taka sfera jest dwuwymiarową przestrzenią Riemanna. Znajdziemy jej tensor metryczny we współrzędnych “geograficznych” (θ, φ) . Współrzędne te parametryzują sferę zgodnie ze wzorami:

$$\begin{aligned}x &= R \sin(\theta) \cos(\varphi) \\y &= R \sin(\theta) \sin(\varphi) \\z &= R \cos(\theta) .\end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z} = R \cos(\theta) \left(\cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \right) - R \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial z}$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} = R \sin(\theta) \left(-\sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} \right) .$$

Pamiętając, że wektory $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ i $\frac{\partial}{\partial z}$ stanowią układ ortonormalny znajdujemy prosto iloczyny skalarne powyższych wektorów, a zatem elementy macierzowe szukanego tensora metrycznego:

$$\begin{aligned}g_{\theta\theta} &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \middle| \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = R^2 \\g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \middle| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = 0 \\g_{\varphi\varphi} &= \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \middle| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = R^2 \sin^2(\theta) .\end{aligned}$$

Tak więc macierz współrzędnych tensora metrycznego na sferze o promieniu R wygląda w tej parametryzacji następująco:

$$g_{ij} = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Jako następny przykład różniczkowości Riemanna weźmy powierzchnię \mathcal{O} zanurzoną w R^3 , daną jednym równaniem:

$$\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in R^2\} .$$

(Przykład ten zawiera w sobie pół-sferę, gdy jako f weźmiemy $f = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.)
Weźmy parametryzację punktów tej powierzchni współrzędnymi (x, y) ich rzutów na płaszczyznę $\{z = 0\}$. Kładziemy zatem:

$$\begin{aligned} x &= \tau^1 , \\ y &= \tau^2 , \\ z &= f(\tau^1, \tau^2) . \end{aligned}$$

Mamy zatem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau^1} &= \frac{\partial x}{\partial \tau^1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \tau^1} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \tau^1} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} , \\ \frac{\partial}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial x}{\partial \tau^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \tau^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \tau^2} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} , \end{aligned}$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$\begin{aligned} f_x &:= \frac{\partial f}{\partial x} , \\ f_y &:= \frac{\partial f}{\partial y} . \end{aligned}$$

Możemy zatem obliczyć współrzędne tensora metrycznego:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial}{\partial \tau^1} \mid \frac{\partial}{\partial \tau^1} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} \mid \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} \right) = 1 + (f_x)^2 \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial}{\partial \tau^2} \mid \frac{\partial}{\partial \tau^2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} \mid \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} \right) = 1 + (f_y)^2 \\ g_{12} = g_{21} &= \left(\frac{\partial}{\partial \tau^1} \mid \frac{\partial}{\partial \tau^2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z} \mid \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} \right) = f_x f_y \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + (f_x)^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + (f_y)^2 \end{pmatrix}$$

Przykład. Powyższy przykład sugeruje rozważenie następującego, krzywoliniowego układu współrzędnych na R^3 :

$$\begin{aligned} x &= \tau^1 \\ y &= \tau^2 \\ z &= f(\tau^1, \tau^2) + \tau^3 , \end{aligned}$$

gdzie f jest gładką funkcją dwóch zmiennych. Odpowiednio otrzymujemy wzory wyrażające starą bazę kowektorów w języku nowej bazy:

$$\begin{aligned} dx &= d\tau^1 \\ dy &= d\tau^2 \\ dz &= f_x d\tau^1 + f_y d\tau^2 + d\tau^3 \end{aligned}$$

oraz (dualne) wzory wyrażające nową bazę wektorów w języku starej bazy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau^1} &= \frac{\partial x}{\partial \tau^1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \tau^1} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \tau^1} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial x}{\partial \tau^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \tau^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \tau^2} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial \tau^3} &= \frac{\partial x}{\partial \tau^3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \tau^3} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \tau^3} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Licząc iloczyny skalarne tych wektorów otrzymujemy następującą macierz tensora metrycznego w zwykłej, płaskiej przestrzeni euklidesowej:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + (f_x)^2 & f_x f_y & f_x \\ f_x f_y & 1 + (f_y)^2 & f_y \\ f_x & f_y & 1 \end{pmatrix}$$

Dla skomplikowanej funkcji f trudno zaiste byłoby odgadnąć, że przestrzeń jest płaska i że istnieje w niej układ globalnie kartezjański, sprowadzający tę macierz do delty Kroneckera.

Forma objętości.

Jeśli M jest zorientowaną rozmaitością Riemanna wymiaru m , to jej struktura metryczna jednoznacznie określa w niej pewną m -formę różniczkową $\omega_{(m)}$, którą nazywamy *formą objętości*. Formę tę zdefiniujemy w dowolnym układzie współrzędnych (τ^1, \dots, τ^m) następującym wzorem:

$$\omega_{(m)} = \sqrt{\det(g_{ij})} d\tau^1 \wedge d\tau^2 \wedge \dots \wedge d\tau^m$$

(nie ma problemu z wyciągnięciem pierwiastka, bowiem metryka jest macierzą dodatnio określoną). Musimy teraz pokazać, że tak zdefiniowana forma nie zależy od wyboru układu współrzędnych. Niech (t^k) będzie nowym układem współrzędnych. Weźmy formę $\tilde{\omega}_{(m)}$ zdefiniowaną identycznym wzorem, ale przy pomocy nowych współrzędnych i odpowiadającej im nowej macierzy \tilde{g}_{kl} . Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{(m)} &= \sqrt{\det \tilde{g}_{kl}} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \dots \wedge dt^m = \\ &= \left| \det \frac{\partial \tau}{\partial t} \right| \sqrt{\det(g_{ij})} \frac{\partial t^1}{\partial \tau^{i_1}} d\tau^{i_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial t^m}{\partial \tau^{i_m}} d\tau^{i_m} = \\ &= \sqrt{\det(g_{ij})} d\tau^1 \wedge d\tau^2 \wedge \dots \wedge d\tau^m \end{aligned}$$

bowiem

$$\tilde{g}_{kl} = \frac{\partial \tau^i}{\partial t^k} \frac{\partial \tau^j}{\partial t^l} g_{ij}$$

a zatem

$$\det(\tilde{g}_{kl}) = \left(\det \frac{\partial \tau^i}{\partial t^k} \right)^2 \det(g_{ij})$$

zaś z zamiany zmiennych w czynniku $dt^1 \wedge dt^2 \wedge \dots \wedge dt^m$ otrzymujemy wyznacznik macierzy odwrotnej $\frac{\partial t^k}{\partial \tau^i}$. Wyznacznik ten jest dodatni jeśli oba układy współrzędnych były zgodne z orientacją, a zatem upraszcza moduł wyznacznika pochodzącego z transformacji tensora metrycznego. Wnioskujemy zatem, że nasza definicja formy objętości *rzeczywiście nie zależy* od wyboru układu współrzędnych pod warunkiem, że będziemy brali jedynie układy zgodne z orientacją, bowiem wtedy nasz rachunek daje nam:

$$\omega_{(m)} = \tilde{\omega}_{(m)} .$$

A zatem na zorientowanej rozmaitości Riemanna mamy dobrze określoną formę objętości.

8. Kanoniczne izomorfizmy generowane przez strukturę Riemanna

1) Izomorfizm między wektorami a kowektorami.

$$T_x M \ni v \longrightarrow v^\flat = (v|\cdot) \in T_x^* M .$$

Ponieważ iloczyn skalarny jest niezdegenerowany, powyższe odwzorowanie jest izomorfizmem przestrzeni liniowych. Odwzorowanie odwrotne nazywamy “operacją podnoszenia wskaźnika” i oznaczamy muzycznym krzyżykiem:

$$T_x^* M \ni \alpha \longrightarrow \alpha^\# \in T_x M .$$

Fakt iż są to operacje wzajemnie odwrotne oznacza iż:

$$\begin{aligned} \flat^{-1} &= \# , \\ \#^{-1} &= \flat . \end{aligned}$$

Pierwszą z tych operacji nazywa się często “operacją opuszczania wskaźnika” a drugą : “operacją podnoszenia wskaźnika”. Nazwy “opuszczanie” i “podnoszenie” wskaźnika są związane z reprezentacją tych odwzorowań na współrzędnych. Obliczmy bowiem współrzędne v_k^\flat kowektora v^\flat , gdy dane są współrzędne v^i wektora v . Mamy mianowicie

$$v^\flat = v_k^\flat d\tau^k$$

gdzie, jak wiemy

$$v_k^\flat = v^\flat \left(\frac{\partial}{\partial \tau^k} \right) = \left(v \left| \frac{\partial}{\partial \tau^k} \right. \right) = \left(v^i \frac{\partial}{\partial \tau^i} \left| \frac{\partial}{\partial \tau^k} \right. \right) = v^i g_{ik} .$$

A zatem współrzędne v_k^b kowektora v^b powstają poprzez “opuszczanie” współrzędnych v^i wektora v przy pomocy macierzy g_{ik} . Oczywiście operacja odwrotna polega na użyciu macierzy odwrotnej g^{kj} , to znaczy takiej, że zachodzi

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j .$$

Przy jej pomocy “podnosimy” współrzędne kowektora α , w rezultacie czego otrzymujemy współrzędne $(\alpha^\#)^j$ odpowiadającego mu wektora $\alpha^\#$:

$$(\alpha^\#)^j = \alpha_k g^{kj} .$$

Mamy więc

$$v_k^b g^{kj} = v^j$$

co oznacza właśnie iż $(v^b)^\# = v$. Podobnie mamy: $(\alpha^\#)^b = \alpha$.

A priori wektory i kowektory są zupełnie innymi obiektami geometrycznymi. Ich utożsamianie jest możliwe dzięki strukturze Riemanna. W przestrzeni euklidesowej można używać współrzędnych kartezjańskich i to utożsamienie jest bardzo proste, bowiem macierz g_{ij} jest w tym wypadku macierzą jednostkową. W wielu problemach można zatem zapomnieć czy mamy do czynienia z wektorem czy z kowektorem. Gdy chcemy jednak używać krzywoliniowych układów współrzędnych, lub gdy przestrzeń nie jest płaska i po prostu nie istnieją w niej układy kartezjańskie, mylenie wektorów z kowektorami może prowadzić do bolesnych pomyłek.

2) Izomorfizm między skalarami a multi-kowektorami najwyższego rzędu (zwanymi też *gęstościami skalarnymi*).

Izomorfizm ten jest dany przez formę objętości: w każdym punkcie $x \in M$ liczbie c przypisujemy multi-kowektor $c\omega_{(m)}(x)$, gdzie $\omega_{(m)}(x)$ jest wartością formy objętości w punkcie x .

Jeśli skorzystamy z tego izomorfizmu *globalnie*, to funkcji f określonej na M przypiszemy formę różniczkową najwyższego rzędu oznaczaną $*f$, daną wzorem:

$$*f := f\omega_{(m)} .$$

Jeśli (τ^1, \dots, τ^m) jest układem współrzędnych zgodnych z orientacją M , to mamy:

$$*f := f\sqrt{\det(g_{ij})} d\tau^1 \wedge d\tau^2 \wedge \dots \wedge d\tau^m .$$

Odwrotnie: dowolna m -forma $\alpha_{(m)}$ na M jest postaci

$$\alpha_{(m)} = \phi d\tau^1 \wedge d\tau^2 \wedge \dots \wedge d\tau^m$$

a zatem jest proporcjonalna do formy objętości:

$$\alpha_{(m)} = \frac{\phi}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \omega_{(m)} .$$

Można jej więc jednoznacznie przypisać funkcję, której wartość w każdym punkcie jest równa temu współczynnikowi proporcjonalności. I to odwzorowanie oznaczmy “gwiazdką” Hodge’a:

$$*\alpha_{(m)} := \frac{\phi}{\sqrt{\det(g_{ij})}} .$$

Łatwo pokazać, że gdy użyjemy innego układu współrzędnych to zarówno licznik i mianownik tego wyrażenia pomnoży się przez ten sam czynnik – Jacobian macierzy pochodnych nowych współrzędnych po starych – a zatem definicja funkcji $*\alpha_{(m)}$ istotnie nie zależy od wyboru układu współrzędnych. Z samej definicji wynika, że “** =id” (operator identycznościowy).

3) Izomorfizm między wektorami a multi-kowektorami rzędu o jeden niższego niż maksymalny (zwanymi też *gęstościami wektorowymi*).

I ten izomorfizm oznaczmy gwiazdką Hodge’a. Jest on dany przez formę objętości następującym wzorem:

$$*X := \langle \omega_{(m)}; X, \cdot, \dots, \cdot \rangle .$$

Ponieważ forma $\omega_{(m)}$ ma m “slotów” na wstawianie wektorów, więc gdy pierwszy z nich został zajęty przez wektor X , pozostanie nam forma z $(m - 1)$ wolnymi “slotami”, czyli $(m - 1)$ -kowektor. W sposób oczywisty definicja ta rozszerza się do izomorfizmu pól wektorowych i $(m - 1)$ -form różniczkowych. Wybierając dowolny (zgodny z orientacją!) układ współrzędnych mamy:

$$\begin{aligned} * \frac{\partial}{\partial \tau^i} &= \langle \sqrt{\det g} d\tau^1 \wedge \dots \wedge d\tau^m; \frac{\partial}{\partial \tau^i}, \cdot, \dots, \cdot \rangle \\ &= \sqrt{\det g} (-1)^{(i-1)} d\tau^1 \wedge \dots \wedge d\tau^{i-1} \wedge d\tau^{i+1} \wedge \dots \wedge d\tau^m \end{aligned}$$

(pominięty został czynnik i -ty). Konsekwentnie, jeśli

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$$

jest polem wektorowym, to odpowiadająca mu $(m - 1)$ -forma ma postać:

$$*X = \sqrt{\det g} \sum_{i=1}^m X^i (-1)^{(i-1)} d\tau^1 \wedge \dots \wedge d\tau^{i-1} \wedge d\tau^{i+1} \wedge \dots \wedge d\tau^m .$$

Powyższy wzór możemy nieco uprościć stosując w zapisie całkowicie antysymetryczny symbol $\epsilon_{i^1 i^2 \dots i^m}$ wprowadzony przez włoskiego matematyka T. Levi-Civitta:

$$\begin{aligned} \epsilon_{i^1 i^2 \dots i^m} &= 0 \quad \text{jeśli wskaźniki powtarzają się,} \\ \epsilon_{i^1 i^2 \dots i^m} &= \text{znak permutacji, jeśli nie powtarzają się.} \end{aligned}$$

Wtedy możemy napisać

$$*X = \frac{1}{(m-1)!} \sqrt{\det g} X^{i^1} \epsilon_{i^1 i^2 \dots i^m} d\tau^{i^2} \wedge \dots \wedge d\tau^{i^m} .$$

Przykład. W przestrzeni o wymiarze 3 powyższe odwzorowanie przypisuje wektorom 2-formy. Ogólne wzory wyprowadzone powyżej redukują się do następujących:

$$\begin{aligned} * \frac{\partial}{\partial \tau^1} &= \sqrt{\det g} d\tau^2 \wedge d\tau^3 \\ * \frac{\partial}{\partial \tau^2} &= \sqrt{\det g} d\tau^3 \wedge d\tau^1 \\ * \frac{\partial}{\partial \tau^3} &= \sqrt{\det g} d\tau^1 \wedge d\tau^2 \end{aligned}$$

oraz:

$$*(X^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}) = \frac{1}{2} \sqrt{\det g} X^i \epsilon_{ijk} d\tau^j \wedge d\tau^k ,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= 0 \quad \text{jeśli wskaźniki powtarzają się,} \\ \epsilon_{ijk} &= \text{znak permutacji, jeśli nie powtarzają się.} \end{aligned}$$

Odwzorowanie odwrotne, przypisujące $(m - 1)$ -formom różniczkowym (“gęstościom wektorowym”) pól wektorowych też będziemy oznaczali gwiazdką Hodge’a. Znajdziemy teraz bezpośredni wzór dający to odwzorowanie w przypadku trójwymiarowym. Niech będzie dana dwuforma

$$\alpha = \frac{1}{2} \alpha_{jk} d\tau^j \wedge d\tau^k .$$

Poszukujemy jej odpowiednika w postaci

$$*\alpha = Y^l \frac{\partial}{\partial \tau^l} .$$

Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy poprzednio, pole to musi spełniać równanie $*Y = \alpha$, to znaczy musi zachodzić:

$$\alpha_{jk} = \sqrt{\det g} Y^l \epsilon_{ljk} .$$

Łatwo sprawdzić, że następujące pole wektorowe:

$$Y^l = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{lmn} \alpha_{mn}$$

spełnia to równanie. Rzeczywiście, wstawiając to pole do prawej strony poprzedniego równania otrzymujemy:

$$\sqrt{\det g} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{lmn} \alpha_{mn} \epsilon_{ljk} = \frac{1}{2} (\delta_j^m \delta_k^n - \delta_k^m \delta_j^n) \alpha_{mn} = \alpha_{jk}$$

gdzie wykorzystaliśmy łatwą do sprawdzenia tożsamość:

$$\epsilon^{lmn} \epsilon_{ljk} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_k^m \delta_j^n .$$

9. Interpretacja fizyczna całek z form różniczkowych

1) Rozmaitość zerowymiarowa to punkt (lub kolekcja punktów). Wybór orientacji takiej rozmaitości polega na wyposażeniu każdego punktu w znak “+” lub “-”. Całka z zeroformy (czyli funkcji) f po takiej zorientowanej rozmaitości to suma wartości f w tych punktach, wziętych ze znakami “+” lub “-”, zależnie od orientacji.

2) Rozmaitość jednowymiarowa γ to krzywa. Orientacja to “zwrot”, czyli informacja w którą stronę “mamy się poruszać”. Brzeg $\partial\gamma$ to dwa punkty: koniec krzywej wyposażony w znak “+” oraz jej początek wyposażony w znak “-” (jeśli krzywa jest zamknięta, to punkty te “znoszą się”, tzn. brzeg jest równy zeru). Całka z jednoformy α po γ jest równa pracy pola wektorowego $\alpha^\#$ po tej krzywej, bowiem wybierając dowolny parametr τ na krzywej zgodny z orientacją mamy na mocy definicji operacji $\#$:

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} \left\langle \alpha, \frac{\partial}{\partial \tau} \right\rangle d\tau = \int_{\gamma} \left(\alpha^\# \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \right. \right) d\tau$$

a to jest właśnie praca pola na krzywej. Aby się o tym przekonać podzielimy wektor $\frac{\partial}{\partial \tau}$ przez jego długość. W ten sposób otrzymamy unormowany wektor styczny do krzywej:

$$\mathbf{t} := \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} \right\|^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Ale przecież długość tego wektora jest równa pierwiastkowi z (jednowymiarowego!) wyznacznika macierzy tensora metrycznego na γ :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \tau} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \right. \right)}.$$

Oznacza to, że

$$ds := \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} \right\| d\tau$$

jest (jednowymiarową) formą objętości na γ , czyli – jak to się często mówi – miarą długości. W przypadku jednowymiarowym zamiast oznaczenia $\omega_{(1)}$ używa się właśnie symbolu ds . Mamy zatem

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma} (\alpha^\# | \mathbf{t}) ds.$$

Funkcja podcałkowa jest równa rzutowi pola $\alpha^\#$ na kierunek przesunięcia, zaś ds jest właśnie owym “przesunięciem”. Oznaczając $\alpha^\# =: X$ możemy również zapisać pracę pola X jako całkę z jedno-formy X^\flat :

$$\int_{\gamma} (X | \mathbf{t}) ds = \int_{\gamma} X^\flat.$$

3) Całka z formy $\alpha_{(m-1)}$ po $(m-1)$ -wymiarowej, zorientowanej powierzchni D w przestrzeni Riemanna jest równa strumieniowi pola wektorowego $*\alpha_{(m-1)}$ przez tę powierzchnię:

$$\int_D \alpha_{(m-1)} = \int_D (*\alpha_{(m-1)} | \mathbf{n}) d\sigma$$

gdzie przez \mathbf{n} oznaczyliśmy unormowany, zorientowany wektor normalny do powierzchni D zaś przez $d\sigma$ – formę $(m-1)$ -wymiarowej objętości na D . Formę tę oznaczaliśmy w naszym wykładzie zazwyczaj przez $\omega_{(m-1)}$, jednak chcemy tutaj nawiązać do oznaczeń używanych w tekstach fizycznych i inżynierskich a także w starszych tekstach matematycznych.

Dla danej powierzchni mamy do wyboru dwa różne, przeciwnie skierowane wektory normalne do powierzchni. W powyższym wzorze bierzemy jeden z nich, jednoznacznie wyznaczony przez orientację powierzchni D oraz orientację całej m -wymiarowej przestrzeni w której “żyją” rozważane obiekty. Procedurę wyboru tego “dobrego” wektora normalnego opiszemy nieco później.

Aby wykazać powyższą tożsamość parametryzujemy powierzchnię D przy pomocy $(m-1)$ parametrów, które oznaczamy (τ^2, \dots, τ^m) . Dobieramy również dodatkowy parametr τ^1 – stały na D , tak by otrzymać (zgodną z orientacją) mapę w całej m -wymiarowej przestrzeni (jako τ^1 można wziąć np. funkcję G , definiującą D jako powierzchnię $(m-1)$ -wymiarową w m -wymiarowej rozmaitości M). Oznaczmy jeszcze $*\alpha_{(m-1)} =: X$. Ze wzoru na formę dualną $\alpha = *X$ wynika, że do całki z formy α wejdzie jedynie człon postaci

$$\sqrt{\det g} X^1 d\tau^2 \wedge \dots \wedge d\tau^m .$$

Oznaczmy przez \tilde{g} tensor metryczny na D . Jest to $(m-1)$ -wymiarowa macierz, której elementy są równe elementom macierzy g_{ij} dla i oraz j przebiegających wartości od 2 do m . Z elementarnej algebry mamy wzór na element macierzowy macierzy odwrotnej:

$$g^{11} = \frac{\det \tilde{g}}{\det g} .$$

Oznacza to, że wyrażenie podcałkowe możemy przepisać do następującej postaci:

$$\frac{X^1}{\sqrt{g^{11}}} \sqrt{\det \tilde{g}} d\tau^2 \wedge \dots \wedge d\tau^m = \frac{X^1}{\sqrt{g^{11}}} d\sigma .$$

Pokażemy, że ułamek poprzedzający formę powierzchni $d\sigma$ na D jest rzeczywiście równy rzutowi pola X na wektor normalny, skierowany w stronę wzrostu zmiennej τ^1 . I rzeczywiście:

$$X^1 = \langle d\tau^1, X \rangle = ((d\tau^1)^\# | X) .$$

Oczywiście wektor $(d\tau^1)^\#$ jest ortogonalny do powierzchni D bowiem jego iloczyn skalarny z wektorami stycznymi do tej powierzchni znika:

$$\left((d\tau^1)^\# \left| \frac{\partial}{\partial \tau^k} \right. \right) = \langle d\tau^1, \frac{\partial}{\partial \tau^k} \rangle = \delta_k^1 = 0$$

dla $k = 2, 3, \dots, m$. Tymczasem $\sqrt{g^{11}}$ jest długością tego wektora, bowiem

$$g^{11} = (d\tau^1 | d\tau^1) = ((d\tau^1)^\# | (d\tau^1)^\#) .$$

Ostatecznie więc otrzymujemy pod całką iloczyn skalarny wektora X z unormowanym wektorem stycznym:

$$\mathbf{n} := \frac{(d\tau^1)^\#}{\sqrt{g^{11}}} = \frac{(d\tau^1)^\#}{\|(d\tau^1)^\#\|} .$$

Zauważmy przy tym, że “automatycznie” wyjaśniliśmy sprawę zwrotu wektora normalnego. Jest ona wyznaczona przez orientację powierzchni D , ale zależy również od orientacji całej m -wymiarowej przestrzeni w której “żyją” nasze obiekty.

Wykazany powyżej związek między strumieniem pola przez powierzchnię zorientowaną a całką z dualnej $(m - 1)$ -formy możemy też przepisać następująco:

$$\int_D (X|\mathbf{n})d\sigma = \int_D *X .$$

4) Całka z funkcji skalarnej f względem miary objętości jest równa całce z m -formy $*f$:

$$\int_D f dV = \int_D *f ,$$

gdzie znów oznaczyliśmy formę objętości przez dV , aby nawiązać kontakt z tekstami o nieco mniej geometrycznym charakterze.

Orientacja wewnętrzna i zewnętrzna powierzchni. użytą w punkcie 3. metodę wyboru “właściwego” wektora normalnego \mathbf{n} do powierzchni wymiaru o jeden mniejszego niż cała przestrzeń warto opatrzyć następującym komentarzem. Wybór jednego spośród dwóch wektorów normalnych nazywa się *zewnętrzną orientacją* powierzchni. Jest to – jak gdyby – wskazanie odpowiedniej “strony” powierzchni (np. wypukłej lub wklęsłej strony powierzchni sferycznej, gdy wektor normalny wybierzemy na zewnątrz lub odpowiednio do wewnątrz kuli. Dotychczas rozważane pojęcie orientacji nazywa się orientacją *wewnętrzną* powierzchni. Np. na powierzchni dwuwymiarowej wybór takiej orientacji to decyzja “w którą stronę mają się kręcić wskazówki zegara”. W ogólności nie ma żadnego związku między tymi dwiema orientacjami. Jeśli jednak cała m -wymiarowa przestrzeń w której się to wszystko dzieje jest sama zorientowana, wtedy istnieje kanoniczny izomorfizm między orientacjami wewnętrznymi i zewnętrznymi. W punkcie 3. użyliśmy właśnie tego izomorfizmu. Można go pokrótce określić następująco: jeśli τ jest dowolną funkcją stałą na D o nieznikającej pochodnej, to zachodzi jedna z dwóch możliwości:

$$\frac{d\tau}{\|d\tau\|} \wedge d\sigma = \begin{cases} +\omega_{(m)} , \\ \text{lub} & -\omega_{(m)} , \end{cases}$$

gdzie $d\sigma$ jest formą $(m - 1)$ wymiarowej objętości na D , wyznaczoną przez orientację powierzchni zaś $\omega_{(m)}$ jest formą m -wymiarowej objętości w całej przestrzeni, wyznaczoną przez jej orientację. Jeśli zachodzi przypadek ze znakiem plus, to wektor \mathbf{n} wybieramy w kierunku wzrostu współrzędnej τ , tzn. kładziemy

$$\mathbf{n} := \frac{(d\tau)^\#}{\|d\tau\|}$$

a w przypadku przeciwnym wybieramy wektor przeciwny. W ten sposób, jeśli w trójwymiarowej przestrzeni wybierzemy np. orientację prawoskrętną, to orientacja wewnętrzna powierzchni (kierunek obrotu wskazówek zegara na powierzchni) jednoznacznie wyznacza jej orientację zewnętrzną (kierunek przesuwania się *prawoskrętnej* śruby, kręcącej zgodnie z orientacją wewnętrzną).

Ćwiczenie. Niech V będzie obszarem trójwymiarowym, na którego powierzchni ∂V działa ciśnienie $p = p(x, y, z)$. Oznacza to, że na element powierzchni o polu “ $d\sigma$ ” działa siła

$$\Delta F = -\mathbf{n}p \, d\sigma$$

(znak “minus” wynika z tego, że siła skierowana jest do wewnątrz obszaru). Jej składowe w kierunku poszczególnych osi są równe:

$$\Delta F^x = (\Delta F | \frac{\partial}{\partial x}) ,$$

$$\Delta F^y = (\Delta F | \frac{\partial}{\partial y}) ,$$

$$\Delta F^z = (\Delta F | \frac{\partial}{\partial z}) .$$

Aby znaleźć wypadkową siłę działającą na całą powierzchnię obszaru V , należy całkować te wielkości po ∂V . Oznaczmy tę wypadkową przez

$$F = F^x \frac{\partial}{\partial x} + F^y \frac{\partial}{\partial y} + F^z \frac{\partial}{\partial z} .$$

Mamy zatem:

$$F^x = - \int_{\partial V} (p \frac{\partial}{\partial x} | \mathbf{n}) d\sigma = - \int_{\partial V} p * \frac{\partial}{\partial x} = - \int_{\partial V} p \cdot dy \wedge dz .$$

Podobnie

$$F^y = - \int_{\partial V} p \cdot dz \wedge dx$$

$$F^z = - \int_{\partial V} p \cdot dx \wedge dy .$$

Jeśli p jest ciśnieniem hydrostatycznym działającym na ciało zanurzone w cieczy:

$$p = -Dgz$$

to z twierdzenia Stokesa otrzymujemy:

$$F^x = Dg \int_{\partial V} z \cdot dy \wedge dz = Dg \int_V d(z \cdot dy \wedge dz) = 0$$

$$F^y = Dg \int_{\partial V} z \cdot dz \wedge dx = Dg \int_V d(z \cdot dz \wedge dx) = 0$$

$$F^z = Dg \int_{\partial V} z \cdot dx \wedge dy = Dg \int_V d(z \cdot dx \wedge dy) = Dg \int_V dx \wedge dy \wedge dz = Dg|V|$$

gdzie przez $|V|$ oznaczyliśmy objętość ciała V . Ostatnia liczba jest równa ciężarowi cieczy wypartej przez ciało V . W ten sposób wyprowadziliśmy prosto prawo Archimedesesa z twierdzenia Stokesa.

10. Analiza wektorowa

1) Gradientem funkcji f na rozmaitości Riemanna nazywamy pole wektorowe $\text{grad}f$ dane wzorem

$$\text{grad}f := (df)^\# .$$

W dowolnym układzie współrzędnych (τ^i) mamy zatem – zgodnie ze współrzędnową reprezentacją operacji “ $\#$ ” oraz “ d ” – następujący wzór na składowe pola $\text{grad}f$:

$$(\text{grad}f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \tau^j} .$$

2) Dywergencją pola wektorowego X na rozmaitości Riemanna nazywamy funkcję $\text{div}X$ daną wzorem

$$\text{div}X := *d * X .$$

Zgodnie ze współrzędnową reprezentacją operatorów “ $*$ ” i “ d ” otrzymujemy następujący wzór na dywergencję pola $X = X^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$:

$$\text{div}X = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial \tau^i} \left(\sqrt{\det g} X^i \right) .$$

3) Laplasjanem (lub operatorem Laplace’a – Beltramiego) na rozmaitości Riemanna nazywamy operator różniczkowy drugiego rzędu Δ działający na funkcje skalarne, dany wzorem:

$$\Delta f = \text{div grad}f .$$

Ze współrzędnowych wzorów na operatory $\text{grad}f$ i $\text{div}X$ wynika następująca tożsamość:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial \tau^i} \left(\sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \tau^j} \right) .$$

Z naszych rozważań wynika, że powyższy wzór da ten sam wynik, niezależnie od wyboru układu współrzędnych, w którym wykonujemy te operacje. Na pierwszy rzut oka wcale nie widać tej niezależności: zarówno pochodne cząstkowe funkcji f jak i składowe tensora metrycznego transformują się w skomplikowany sposób, a ich pierwsze i drugie pochodne – w jeszcze bardziej skomplikowany – przy przejściu od jednego do drugiego układu współrzędnych. Tymczasem *my wiemy* że wynik tych operacji nie zmienia się przy takiej zamianie. Dowód tej niezmienniczości *explicite*, z własności transformacyjnych rozważanych obiektów jest bardzo ważnym ćwiczeniem, które stanowczo polecam wszystkim.

4) W trójwymiarowej przestrzeni Riemanna można jeszcze określić operator *rotacji*, który polu wektorowemu X przypisuje pole wektorowe $\text{rot}X$ dane wzorem:

$$\text{rot}X = *dX^\flat$$

(w książkach angielskojęzycznych zamiast symbolu “rot” używa się symbolu “curl”). Obiekt X^b jest zawsze jednoformą zatem jego różniczka – dwuformą. Aby zatem gwiazdka Hodge’a wyprodukowała z niej znów pole wektorowe musi być $m = 3$.

Zgodnie z poznaną współrzędnową reprezentacją używanych operacji mamy w dowolnym układzie współrzędnych:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$$

opuszczamy wskaźniki:

$$X^b = (X^i g_{ij}) d\tau^j$$

różniczkujemy

$$dX^b = \frac{\partial}{\partial \tau^k} (X^i g_{ij}) d\tau^k \wedge d\tau^j = \frac{1}{2} [\partial_k (X^i g_{ij}) - \partial_j (X^i g_{ik})] d\tau^k \wedge d\tau^j$$

Ostatecznie więc:

$$\begin{aligned} (\text{rot} X)^l &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{lkj} [\partial_k (X^i g_{ij}) - \partial_j (X^i g_{ik})] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{lkj} \partial_k (X^i g_{ij}) \end{aligned}$$

Laplasjan we współrzędnych sferycznych.

Jeśli na początku wybraliśmy orientację prawoskrętną (x, y, z) , to teraz przy nowej parametryzacji wybieramy (r, Θ, φ)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \sin(\Theta) \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\Theta) \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(\Theta) \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \Theta} &= r \cos(\Theta) \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + r \cos(\Theta) \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial y} - r \sin(\Theta) \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= r \sin(\Theta) (-\sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial y}) \end{aligned}$$

Zgodnie z naszymi poprzednimi wynikami otrzymujemy następujące macierze g_{ij} i odwrotną do niej g^{ij} :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \Theta \end{pmatrix} \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \end{pmatrix}$$

Wynika stąd, że mamy $\det g = r^4 \sin^2 \Theta$. Wobec tego:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \left(\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j f \right) = \\
&= \frac{1}{r^2 \sin(\Theta)} \left(\partial_r (r^2 \sin(\Theta) \partial_r f) + \partial_\Theta (r^2 \sin(\Theta) \frac{1}{r^2} \partial_\Theta f) + \partial_\varphi (r^2 \sin(\Theta) \frac{1}{r^2 \sin^2(\Theta)} \partial_\varphi f) \right) = \\
&= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin(\Theta)} \partial_\Theta (\sin(\Theta) \partial_\Theta f) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\Theta)} \partial_\varphi^2 f = \\
&= \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) f + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin(\Theta)} \partial_\Theta (\sin(\Theta) \partial_\Theta f) + \frac{1}{\sin^2(\Theta)} \partial_\varphi^2 f \right]
\end{aligned}$$

Operator:

$$\frac{1}{\sin(\Theta)} \partial_\Theta (\sin(\Theta) \partial_\Theta f) + \frac{\partial_\varphi^2 f}{\sin^2(\Theta)} =: \Delta^{(2)} f$$

zależy tylko od kątów. Latwo widać, że jest to dwuwymiarowy laplasjan na sferze o promieniu $r = 1$. A zatem trójwymiarowy laplasjan we współrzędnych sferycznych można zapisać w postaci:

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta^{(2)}$$

Gradient we współrzędnych sferycznych.

$$(\text{grad} f)^i = g^{ij} \partial_j f$$

$$(\text{grad} f)^r = \partial_r f$$

$$(\text{grad} f)^\Theta = \frac{1}{r^2} \partial_\Theta f$$

$$(\text{grad} f)^\varphi = \frac{1}{r^2 \sin^2(\Theta)} \partial_\varphi f$$

$$\text{grad} f = (\partial_r f) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[(\partial_\Theta f) \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2(\Theta)} (\partial_\varphi f) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$$

Rotacja we współrzędnych sferycznych.

Ogólnie mamy:

$$(\text{rot} X)^l = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{lkj} \partial_k (X^i g_{ij})$$

A zatem:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} X)^r &= \frac{1}{r^2 \sin(\Theta)} \epsilon^{rkj} \partial_k (X^i g_{ij}) = \\
&= \frac{1}{r^2 \sin(\Theta)} \left(\partial_\Theta (X^i g_{i\varphi}) - \partial_\varphi (X^i g_{i\Theta}) \right) = \\
&= \frac{1}{r^2 \sin(\Theta)} \left(\partial_\Theta (X^\varphi r^2 \sin^2(\Theta)) - \partial_\varphi (X^\Theta r^2) \right) = \\
&= \frac{1}{\sin(\Theta)} \left(\partial_\Theta (X^\varphi \sin^2(\Theta)) - \partial_\varphi (X^\Theta) \right) \\
(\operatorname{rot} X)^\Theta &= \frac{1}{r^2 \sin(\Theta)} \partial_\varphi X^r - \frac{\sin(\Theta)}{r^2} \partial_r (X^\varphi r^2) \\
(\operatorname{rot} X)^\varphi &= \frac{1}{r^2 \sin(\Theta)} \left(\partial_r (X^i g_{i\Theta}) - \partial_\Theta (X^i g_{ir}) \right) = \\
&= \frac{1}{r^2 \sin(\Theta)} \left(\partial_r (X^\Theta r^2) - \partial_\Theta (X^r) \right)
\end{aligned}$$

Uwaga. Z tożsamości “ $dd=0$ ” wynika natychmiast, że $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0$ oraz $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$. Mamy bowiem:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= \operatorname{rot}((df)^\#) = *d((df)^\#)^b = *ddf = 0 \\
\operatorname{div} \operatorname{rot} x &= *d[*d(X)^b] = *dd(X)^b = 0
\end{aligned}$$

Lemat Poincaré tłumaczy się zatem na następujące wnioski:

- 1) Pole bezwirowe (tzn. takie, którego rotacja znika) jest lokalnie *gradientem* tzn. ma lokalny potencjał skalarny.
- 2) Pole bezźródłowe (tzn. takie, którego diwergencja znika) jest lokalnie rotacją tzn. ma lokalny potencjał wektorowy.

W trywialnych topologicznie przestrzeniach istnienie tych potencjałów jest również zapewnione *globalnie*.

Używając interpretacji fizycznej całek z form różniczkowych jako pracy pola wzdłuż krzywej czy strumienia pola przez powierzchnię, można wszystkie trzy przypadki twierdzenia Stokesa w przestrzeni trójwymiarowej przepisać jak następuje:

- 1) Gdy jako zero-formę $\alpha_{(0)}$ wziąć funkcję f , oraz gdy γ jest krzywą łączącą punkt a z punktem b (tzn. gdy zachodzi $\partial\gamma = +\{b\} - \{a\}$) otrzymujemy

$$\int_\gamma (\operatorname{grad} f | \mathbf{t}) ds = f(b) - f(a) .$$

- 2) Gdy jako jednoformę weźmiemy $\alpha_{(1)} = X^b$, gdzie X jest polem wektorowym, twierdzenie Stokesa dla dwuwymiarowej powierzchni D daje:

$$\int_D (\operatorname{rot} X | \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\partial D} (X | \mathbf{t}) ds .$$

3) Gdy jako dwuformę weźmiemy $\alpha_{(2)} = *X$, gdzie X jest polem wektorowym, twierdzenie Stokesa dla trójwymiarowego obszaru V daje:

$$\int_V \operatorname{div} X \, dV = \int_{\partial V} (X|\mathbf{n}) \, d\sigma .$$