# Chaos, fraktale oraz euroatraktor

*Karol Życzkowski i Artur Łoziński*
*Instytut Fizyki UJ*

Obserwując poruszający się przedmiot, stawiamy pytanie, jak wyglądać będzie jego ruch w przyszłości. Ścisły opis poruszających się ciał, pozwalający na wyznaczenie ich trajektorii, należy do głównych zadań fizyki, a w szczególności *mechaniki*. Problem klasyfikacji możliwych rodzajów ruchu jest też przedmiotem badań *teorii układów dynamicznych*, stanowiącej intensywnie rozwijający się dział współczesnej matematyki.

Podstawowe zasady mechaniki sformułowano w XVIII wieku na bazie praw Newtona. Osiągnięte wtedy wyniki umożliwiły bardzo dokładny opis ruchu ciał na ziemi i niebie. Wśród uczonych powszechne były opinie, że dynamika stanowi zamknięty dział mechaniki, a znając dokładne położenie i prędkość danego ciała oraz działające nań siły, można przewidzieć jego ruch w dowolnie odległej przyszłości.

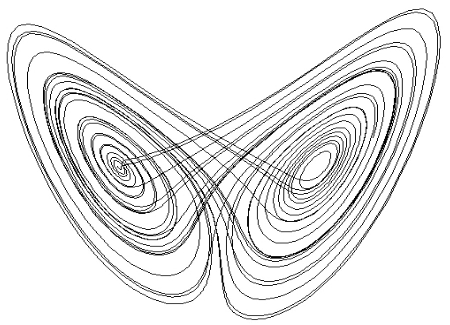
Dopiero w XX wieku jasno zdano sobie sprawę z kluczowego problemu, który napotka się, realizując taki program. Nie jest bowiem możliwe wyznaczenie początkowego położenia i prędkości ciała z dowolną dokładnością, a wiele układów dynamicznych poprawnie opisujących rzeczywistość wykazuje *niestabilność*: nawet bardzo mała zmiana początkowego położenia ciała w zasadniczy sposób wpływa na jego ruch w przyszłości. Dokładnie z taką sytuacją mają do czynienia gracze w bilard, gdyż niewielka zmiana siły uderzenia w bilę może zadecydować o wyniku gry. Podobnie mała zmiana ciśnienia czy temperatury pewnego dnia w danym miejscu na kuli ziemskiej może istotnie wpłynąć na późniejsze zachowanie się atmosfery w innym regionie świata. Ten fakt, po opublikowaniu artykułu Edwarda Lorenza „Can the flap of a butterfly's wing stir up a tornado in Texas*", określany mianem *efektu motyla*, utrudnia długoterminowe prognozy pogody.

Układ poruszających się ciał nazywa się *chaotycznym*, jeśli dynamika jest bardzo czuła na początkowe położenie i prędkość jego elementów. Ruch w takich układach można opisywać zgodnie z klasycznymi zasadami mechaniki, ale uzyskane przepowiednie będą wiarygodne tylko przez krótki czas (np. w bilardzie do momentu zderzenia z inną bilą). Do tej klasy układów należą *układy nieliniowe*, w których skutek nie jest liniowo proporcjonalny do wielkości opisującej przyczynę. Równań ruchu układów chaotycznych nie można, w ogólnym przypadku, rozwiązać w sposób ścisły, a polegać trzeba jedynie na przybliżonych metodach nume-

* „Czy ruch skrzydeł motyla może wywołać tornado w Teksasie?"

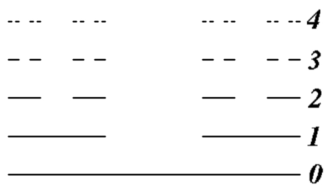
rycznych. Szybki wzrost mocy obliczeniowej komputerów, jaki miał miejsce w ciągu ostatnich dwudziestu lat, stanowił jedną z przyczyn rozwoju oraz sukcesów teorii chaosu i układów dynamicznych.

Ruch wszystkich ciał w przyrodzie podlega różnego rodzajom sił oporu, np. sił tarcia. To właśnie siła oporu powietrza, a także siła tarcia występująca w zamocowaniu, sprawia, że puszczone w ruch wahadło po pewnym czasie zatrzyma się. Spoczynkowe położenie wahadła, pionowo w dół, nie zależy od jego początkowego wychylenia i prędkości. W takim przypadku mówimy, że w układzie występuje *atraktor*: wyróżniony podzbiór możliwych stanów układu, do którego nieuchronnie zmierza ewolucja układu. Pewną charakterystykę atraktora zawiera porzekadło „wszystkie drogi prowadzą do Rzymu", gdyż przedstawia wybrany punkt, do którego zmierza każdy wędrowiec. W przypadku wahadła atraktorem jest jeden punkt (położenie równowagi), ale w ogólności układ nie musi dążyć do stanu spoczynkowego, a atraktory mogą posiadać skomplikowaną strukturę. Specjalną klasę stanowią *dziwne atraktory*, które przyciągają trajektorie z zewnątrz, a ruch w ich wnętrzu jest chaotyczny i nieprzewidywalny. Pierwszy przykład takiego atraktora znalazł Lorenz, analizując matematyczny model służący do opisu zjawisk meteorologicznych.



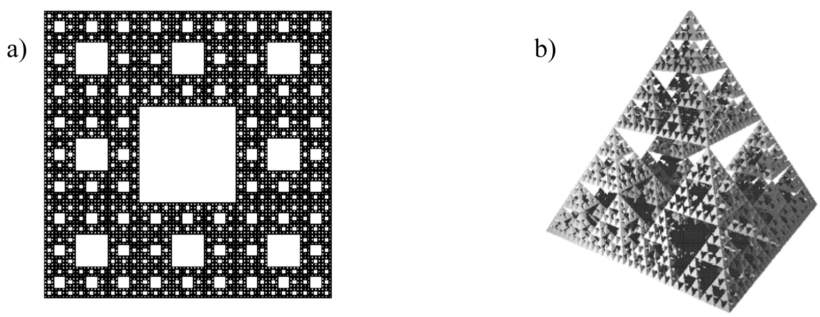
Rys. 1. Ruch w dziwnym atraktorze Lorenza jest chaotyczny: nie można przewidzieć, czy w kolejnym kroku trajektoria znajdzie się w jednej pętli, czy w drugiej

Pojecie atraktora można też zdefiniować dla szerokiej klasy przekształceń matematycznych. Przykładowo, atraktorem operacji mnożenia dowolnej liczby przez 0,9 jest tylko i wyłącznie jedna liczba – zero, o czym wydają się zapominać pewni ekonomiści i politycy, proponujący wielokrotne opodatkowanie niektórych dochodów. Dla matematyka atraktorem będzie więc przyciągający punkt stały badanego przekształcenia. W przypadku przekształceń na płaszczyźnie atraktorami mogą być całe zbiory (nie zmieniające się pod wpływem tegoż przekształcenia), często o bardzo ciekawej strukturze geometrycznej. Dynamika pewnych układów, opisanych prostymi wzorami, może prowadzić do atraktorów o fascynujących kształtach. Szczególnie interesujące są atraktory samopodobne, np. zbiór odkryty przez niemieckiego matematyka Georga Cantora w 1883 roku. Po powiększeniu trzykrotnym lewej części zbioru narysowanego w górnej linijce otrzymamy cały zbiór.




Rys. 2. Cztery kroki procesu tworzenia zbioru Cantora, polegające na usunięciu z każdego odcinka jego środkowej, trzeciej części. Kontynuując ten proces, otrzymamy zbiór fraktalny o wymiarze D = ln 2/ln 3 ≈ 0,63093

Własność samopodobieństwa związana jest z pojęciem wymiaru fraktalnego. Na lekcjach geometrii uczniowie uczą się rozróżniać obiekty jednowymiarowe (odcinek), dwuwymiarowe (koło, kwadrat) od trójwymiarowych (sześcian), a zrozumienie tych prostych własności pomaga w życiu codziennym: drut kupujemy na metry, za parkiet płacimy proporcjonalnie do liczby metrów kwadratowych, a pojemność silnika podajemy w centymetrach sześciennych. Nie jest więc dla nas niespodzianką, że jeśli długość wszystkich ścian pokoju zwiększymy dwukrotnie, to za parkiet będziemy musieli zapłacić cztery razy więcej. Przyzwyczajeni zatem jesteśmy, że wymiar obiektu wyraża się liczbami naturalnymi: 1, 2 albo 3.




Rys. 3. a) Dywan Sierpińskiego o wymiarze D = ln 8/ln 3 ≈ 1,8928; b) Piramida Sierpińskiego o wymiarze D = 2

Jeśli chcemy rozmiar odcinka wydrukowanego na papierze zwiększyć trzykrotnie, to ilość potrzebnego tuszu do narysowania tak powiększonego odcinka też wzrośnie trzykrotnie. Tę intuicyjnie zrozumiałą własność możemy wykorzystać do zdefiniowania wymiaru fraktalnego:

$$D = \lim_{P \to \infty} \frac{\ln N(P)}{\ln P},$$

gdzie P jest powiększeniem, a N(P) ilością tuszu niezbędną do narysowania P-krotnie powiększonego zbioru. Dla odcinka, zgodnie z przewidywaniami, otrzymujemy $D_{odcinka} = 1$. Jednakże w przypadku innych zbiorów, nawet tych zawartych na prostej, może być inaczej. Powiększając trzykrotnie samopodobny zbiór Cantora, wystarczy nam tylko dwukrotnie zwiększyć ilość zużytego tuszu drukarki. Ta obserwacja świadczy o tym, że wymiar zbioru Cantora jest mniejszy od jedności. Doprecyzowując szczegóły matematyczne, można podać ścisłą definicję wymiaru, która nie musi być liczbą naturalną, ale dla standardowych obiektów będzie dawać oczekiwany wynik 1, 2 lub 3.

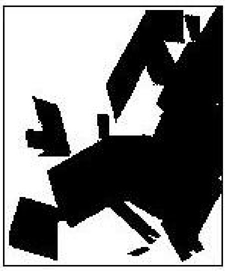
*Fraktalami* nazywamy zbiory geometryczne, dla których wymiar nie jest liczbą naturalną. Przykładowo, fraktalem o wymiarze równym stosunkowi logarytmu z 2 do logarytmu z 3 jest zbiór Cantora (podzbiór odcinka o wymiarze 1), a dywan Sierpińskiego (podzbiór kwadratu) stanowi fraktal o wymiarze ln 8/ln 3. Figura ta została zdefiniowana i zbadana przez wybitnego polskiego matematyka Wacława Sierpińskiego w 1915 roku. Warto podkreślić, że ścisła definicja takich figur nakazuje w nieskończoność powtarzać procedurę usuwania z dywanu coraz mniejszych podzbiorów w kształcie kwadratu, dlatego też rysunek dywanu na papierze jest, z konieczności, jedynie jego przybliżeniem. Precyzyjna definicja fraktala jest jednak bardziej złożona, gdyż przykładowo piramida Sierpińskiego jest fraktalem o wymierze 2. Obiekty w przybliżeniu samopodobne, o cechach fraktali, występują w przyrodzie: jeden liść paproci przypomina całą roślinę, odpowiednio pomniejszoną. Podobne cechy ma fragment kwiatu kalafiora, płatek śniegu, zgrupowanie chmur, sieć dopływów niektórych rzek lub pewne łańcuchy gór. Dlatego też wymiar fraktalny nie jest tylko osobliwością matematyczną, ale narzędziem pozwalającym lepiej opisywać otaczający nas świat.

Analizując układy dynamiczne, ciekawe z punktu widzenia zastosowań w fizyce, można natknąć się na atraktory o strukturze fraktalnej i zadziwiających kształtach, często przypominające grafikę współczesną. Z drugiej strony, można też poszukiwać układów dynamicznych, których atraktory posiadają określony kształt lub spełniają zadane warunki. W taki sposób kodować można informacje graficzną: cyfrowy zapis układu dynamicznego w postaci definiujących go równań zajmuje mniej pamięci komputera niż graficzne odwzorowanie, bit po bicie, odpowiadającego mu atraktora. W podobny sposób grafika komputerowa, oparta na koncepcjach zbiorów fraktalnych i atraktorów, wykorzystywana jest przy tworzeniu sztucznych krajobrazów oraz filmowych efektów specjalnych.

Układy chaotyczne, których ewolucji nie da się przewidzieć na dłuższy czas, występują nie tylko w zagadnieniach fizyki. Niewielka zmiana warunków początkowych może zupełnie zmienić przebieg niektórych reakcji chemicznych. Wiele używanych w biologii modeli, opisujących procesy ewolucyjne, wykazuje rozwiązania chaotyczne, a zatem nawet niewielka warunków ekologicznych panujących na ziemi przed wiekami mogłaby całkowicie zmienić kierunek ewolucji naszego gatunku. W ciągu ostatniej dekady dynamika nieliniowa znalazła także zastosowanie w ekonomii oraz w naukach społecznych. Co prawda teoria układów chaotycznych oraz układów dynamicznych z zaburzeniami losowymi nie pozwolą przewidzieć dziś kursu wymiany złotego do euro w dniu 1 stycznia 2004 lub wyniku kandydatów partii ABC w wyborach, ale ułatwią zrozumienie i modelowanie obserwowanych procesów społecznych.

Teoria chaosu i układów dynamicznych uprawiana jest w Polsce z powodzeniem w różnych ośrodkach akademickich, a na organizowane konferencje przyjeżdżają wybitni uczeni z całego świata. W dniach 19–22 czerwca 2002 roku w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie odbyła się konferencja „Geometric Theory of Dynamical Systems"
(http://www.im.uj.edu.pl/gtds), a Instytut Biocybernetyki PAN w Warszawie zorganizował w okresie 18–27 czerwca konferencję „Euroattractor 2002", poświęconą dynamice nieliniowej i analizie sygnałów czasowych
(http://hrabia.ibib.waw.pl/~euroattractor).

Konferencja ***Euroattractor***, po raz trzeci organizowana w Warszawie, mimo swej nazwy przyciąga także naukowców spoza Europy. Nazwa ta zainspirowała nas do poszukania układu dynamicznego, którego atraktor ma kształt zbliżony do konturów naszego kontynentu. Niezależnie od wyjściowego zbioru na płaszczyźnie, ewolucja układu w czasie dążyć będzie do zbioru przedstawionego na rys 4. Szczegółowe dane można znaleźć w naszym artykule w Internecie:
http://www.arxiv.org/abs/nlin.CD/0210071



Rys. 4. **Euroatraktor:** zbiór nie zmieniający się podczas ewolucji układu w czasie

Patrząc na zmiany polityczne, zachodzące w Europie w ciągu ostatniej dekady, można zastanawiać się, czy Unia Europejska ma tyle siły przyciągania, aby stać się globalnym atraktorem, przyciągającym wszystkie kraje naszego kontynentu. Wydawałoby się, że odpowiedzi na to pytanie powinny dostarczyć nauki polityczne i społeczne. Ale teoria układów nieliniowych uczy nas, że prognozowanie ewolucji układów niestabilnych w czasie nie jest możliwe na dłuższą metę. Czy pozostaje nam jedynie bierne oczekiwanie na nieuchronny rozwój wydarzeń? A może, biorąc przykład z motyla Lorenza, wystarczy w odpowiednim momencie delikatnie zatrzepotać skrzydełkiem?

Literatura:

[1] I. Stewart, Czy *Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, PWN, Warszawa 2001
[2] J. Gleick, *Chaos – narodziny nauki*, Zysk i S-ka, Poznań 1996
[3] E. Ott, *Chaos w układach dynamicznych*, WNT, Warszawa 1997
[4] H. G. Schuster, *Chaos deterministyczny*, PWN, Warszawa 1993
[5] J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos*, WNT, Warszawa 1996
[6] H. O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe, *Granice chaosu. Fraktale*, PWN, Warszawa 1997
[7] G. L. Baker, J. P. Gollum, *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*, PWN, Warszawa 1998