

Euroatraktor: o losowych układach dynamicznych

Artur Łoziński

Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński

Karol Życzkowski

Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński oraz Centrum Fizyki Teoretycznej PAN, Warszawa

Euroattractor: on random dynamical systems

Dyskretne układy dynamiczne z jednej strony stanowią szybko rozwijający się dział matematyki [1], a z drugiej są używane przez fizyków do modelowania bardziej złożonych procesów fizycznych. Analiza takich prostych odwzorowań odcinka w odcinek, jak odwzorowanie logistyczne, przesunięcie Bernoulliego czy odwzorowanie namiotowe, umożliwiła zrozumienie i opisanie zjawiska chaosu w układach nieliniowych [2–5].

Odwzorowania dyskretne należą do klasy układów deterministycznych: dowolny punkt początkowy układu określa jednoznacznie jego trajektorię. W niniejszym artykule przedstawimy ideę układu iterowanych odwzorowań (ang. iterated function systems, IFS), który stanowi pewne uogólnienie dyskretnego układu dynamicznego. Rozważmy zbiór k dyskretnych odwzorowań $f_i: \Omega \rightarrow \Omega$, $i = 1, \dots, k$, przekształcających zbiór Ω w siebie. Przed każdym krokiem wybieramy w sposób losowy jeden układ dynamiczny, który będzie użyty w danej iteracji. Wybór układu f_i następuje z zadaniem prawdopodobieństwem p_i , przy czym spełniony jest warunek $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Układ iterowanych odwzorowań, zdefiniowany w ten sposób, jest stochastyczny: dynamika zależy od czynnika losowego określającego, które odwzorowanie, spośród k możliwych, zostanie wykorzystane w danym kroku iteracji.

Rozważmy prosty przykład IFS-u składającego się z dwóch odwzorowań:

$$f_1(x) = x/3 \quad \text{oraz} \quad f_2(x) = (x + 2)/3, \quad (1)$$

zdefiniowanych na odcinku jednostkowym $\Omega = [0, 1]$. Obydwa prawdopodobieństwa są sobie równe i wynoszą $p_1 = p_2 = 1/2$. Trajektorię rozpoczynającą się w dowolnym punkcie $x_0 \in \Omega$ generujemy w następujący sposób: z równym prawdopodobieństwem losujemy jeden z układów, a wylosowany układ, działając na x_0 , wyznacza punkt x_1 . Kolejny krok iteracji polega na ponownym losowym wybraniu układu, który określi punkt $x_2 = f(x_1)$ przy założeniu, że zmienne

losowe są od siebie niezależne. Taki schemat postępowania odpowiada losowej wędrówce ulicami miasta, gdy na każdym skrzyżowaniu rzucamy (odpowiednią) kostką, aby określić kierunek dalszego marszu. W ten sposób można modelować procesy fizyczne, w których dynamika przez pewien czas jest deterministyczna, ale wybór rodzaju oddziaływania zależy od niekontrolowanego czynnika przypadkowego.

Zrealizujmy za pomocą komputera przykładową trajektorię układu losowego (1). Iteracje rozpoczynamy z dowolnego punktu x_0 , a na odcinku $[0, 1]$ oznaczamy tylko drugi tysiąc punktów, $\{x_{1001}, \dots, x_{2000}\}$. W jaki kształt ułożą się punkty na ekranie? Powtarzając kilkakrotnie takie doświadczenie numeryczne zaobserwujemy, iż niezależnie od wyboru punktu początkowego i konkretnej realizacji procesu losowego obraz powstający na ekranie są nie do rozróżnienia. Co więcej, powstający obraz ma skomplikowaną strukturę fraktalnego zbioru Cantora, pomimo że dynamika każdego z układów z osobna jest prosta i łatwa do opisanie: każde odwzorowanie ma jeden przyciągający punkt stały, $(f_1)^n(x) \rightarrow 0$ oraz $(f_2)^n(x) \rightarrow 1$.

Dynamikę danego IFS-u można również opisywać, analizując ewolucję gęstości (lub ogólniej, miar probabilistycznych) zadanych na zbiorze Ω . Załóżmy, że początkowa gęstość jest jednorodna, tzn. $\gamma_0(x) = 1$ dla $x \in [0, 1]$. Jak będzie wyglądała gęstość $\gamma_1(x)$ po jednokrotnej iteracji układem iterowanych odwzorowań? Otrzymanie odpowiedzi ułatwi wprowadzenie operatora Markowa, stowarzyszonego z każdym IFS-em. W najprostszym przypadku, gdy wszystkie odwzorowania f_i są odwracalne, operator Markowa M opisujący ewolucję gęstości γ jest zdefiniowany wzorem [6,7]

$$M[\gamma](x) = \sum_{i=1}^K p_i (f_i^{-1}(x)) \gamma(f_i^{-1}(x)) \left| \frac{df_i^{-1}}{dx} \right|, \quad (2)$$

gdzie $x \in \Omega$. W analizowanym przykładzie obrazem

gęstości jednorodnej $\gamma_0(x)$ jest $\gamma_1 = M[\gamma_0]$, czyli gęstość jednorodna w każdym z przedziałów: $[0, 1/3]$ oraz $[2/3, 1]$. W kolejnej iteracji powstaje gęstość γ_2 , jednorodna na czterech przedziałach o długości $1/9$, a w granicy asymptotycznej otrzymamy osobliwą miarę prawdopodobieństwa μ_* skoncentrowaną na fraktalnym zbiorze Cantora, jak ilustruje rys. 1. Zbiór ten ma własności samopodobne, gdyż powiększając trzykrotnie lewą część zbioru, zawartą w odcinku $[0, 1/3]$, otrzymamy cały zbiór.



Rys. 1. Cztery kolejne iteracje początkowej miary jednorodnej na odcinku jednostkowym. Kolejne miary są coraz bardziej podobne do miary niezmienniczej μ_* IFS-u zdefiniowanego wzorem (1).

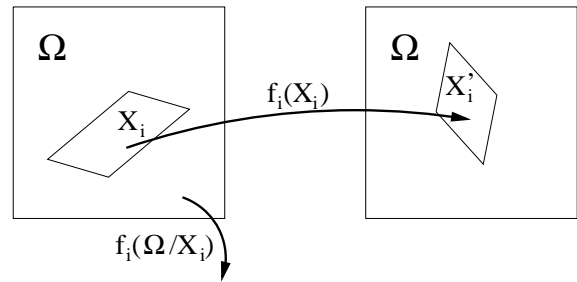
Punkty określone przez dowolną trajektorię generowaną przez IFS (1) utworzą na ekranie zbiór Cantora (a ściślej mówiąc, jego dowolnie dobre przybliżenie), gdyż miara Cantora μ_* jest miarą niezmienniczą operatora Markowa, $\mu_* = M[\mu_*]$. Jest to miara przyciągająca, tzn. rozpoczynając iteracje z dowolnej miary początkowej ν otrzymamy w granicy miarę Cantora, $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n[\nu] = \mu_*$. Takie przyciągające miary niezmiennicze nazywamy atraktorami układu, choć niekiedy ta nazwa dotyczy też zbiorów niezmienniczych, czyli nośników miary niezmienniczej.

Interesującym problemem matematycznym jest podanie warunków wystarczających, aby dany IFS miał tylko jedną miarę przyciągającą. Można wykazać [8], że przy stałych prawdopodobieństwach p_i warunkiem wystarczającym istnienia atraktora dla danego iterowanego układu odwzorowań jest własność zwięzania (kontrakcji), spełniana przez każde z odwzorowań f_i . Oznacza to, że istnieje taka liczba $L < 1$ (stała Lipschitza), że dla każdej pary punktów $x, y \in \Omega$ spełniony jest warunek: $d(f_i(x), f_i(y)) \leq Ld(x, y)$. IFS spełniający tę własność nazywany jest hiperbolicznym, a przykład (1) należy do tej klasy (ze stałą $L = 1/3$ dla obu odwzorowań).

Zbiory niezmiennicze pewnej klasy iterowanych układów odwzorowań mają własności fraktalne. IFS-y działające w przestrzeni dwuwymiarowej mogą służyć do tworzenia grafiki komputerowej oraz projektowania sztucznych krajobrazów i graficznych efektów specjalnych [8,9]. Innym zastosowaniem iterowanych układów

odwzorowań może być kodowanie lub kompresja informacji graficznej: zamiast zapamiętywać rysunek bit po bicie, można próbować znaleźć układ, którego miara niezmiennicza dobrze przybliży kodowaną informację, a następnie przesyłać liczby definiujące IFS. Na podstawie otrzymanych danych odbiorca można odzyskać zakodowaną informację graficzną przez iterowanie tak zdefiniowanego układu.

Zanim przedstawimy przykład IFS-u dopasowanego do danej informacji graficznej, przedstawimy jego proste uogólnienie. W standardowej definicji IFS odwzorowania f_i przeprowadzają całą przestrzeń Ω na nią samą. Zrezygnujemy jednak z tego wymogu i dopuścimy szerszą klasę odwzorowań. Dla każdego odwzorowania f_i zdefiniujemy zbiór $X_i \subset \Omega$, który zostaje odwzorowany na przestrzeń Ω ($f_i: X_i \rightarrow \Omega$). Natomiast punkty należące do dopełnienia tego zbioru (tj. należące do zbioru $\Omega \setminus X_i$) są odwzorowywane poza przestrzeń Ω (rys. 2).

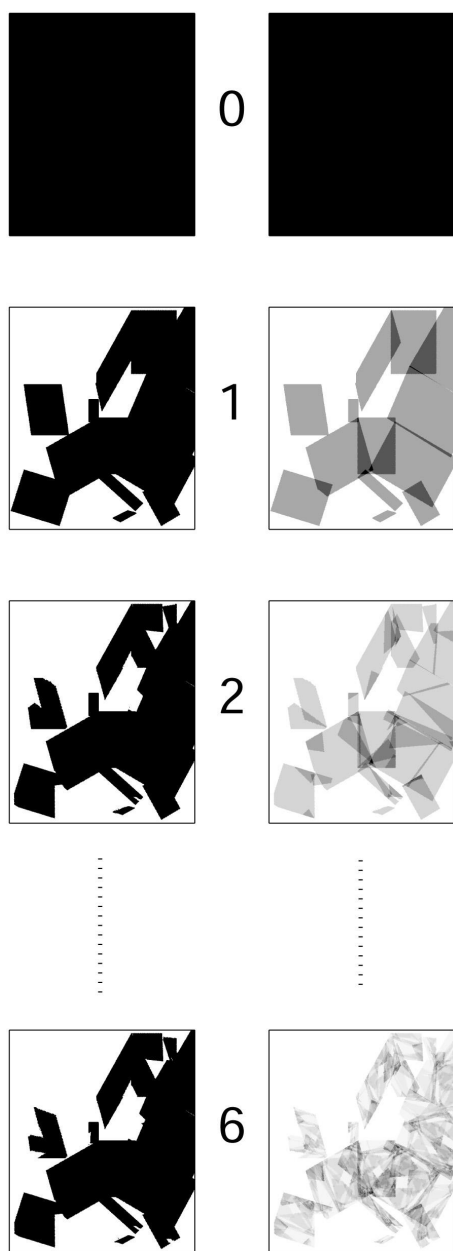


Rys. 2. Ilustracja działania odwzorowań dopuszczalnych dla uogólnionych IFS-ów. Dla odwzorowania f_k każdy punkt należący do zbioru X_k jest odwzorowywany na pewien punkt z przestrzeni Ω . Punkty nienależące do zbioru X_k są usuwane poza Ω .

Jako przykład zdefiniujemy uogólniony IFS, składający się z 13 odwzorowań f_i zdefiniowanych na czworokątnych podzbiorach X_i kwadratu jednostkowego, $\Omega = [0, 1]^2$, o jednakowych prawdopodobieństwach, $p_i = 1/13$, $i = 1, \dots, 13$. Każde odwzorowanie f_i jest afiniczne i zadane przez macierz 2×2 przekształcenia liniowego oraz wektor translacji. Wartości parametrów wszystkich odwzorowań znaleźć można w preprintie [10], natomiast rys. 3 pokazuje wybrane iteracje miary początkowej, która jednorodnie pokrywa kwadrat jednostkowy. Już szósta iteracja tej miary nie jest numerycznie odróżnialna od siódmej iteracji (i następnych), a więc może być traktowana jako dobre przybliżenie miary niezmienniczej. Kształt zbioru niezmienniczego (nośnika miary niezmienniczej) uzasadnia nadanie układowi nazwy Euroatraktor¹. Chociaż nie jesteśmy w stanie udowodnić, że w takim układzie istnieje dokładnie jedna miara niezmiennicza, wyniki

¹ Do zdefiniowania tego układu zainspirowała nas konferencja „Euroatraktor” zorganizowana przez prof. W. Kłownoskiego z Instytutu Biocybernetyki PAN w Warszawie w czerwcu 2002 r. (patrz hrabia.ibib.waw.pl/~euroatraktor).

numeryczne nie są sprzeczne z taką hipotezą²: dla dowolnego zbioru warunków początkowych układ dąży do atraktora przedstawionego po lewej stronie u dołu rys. 3...



Rys. 3. Euroatraktor. Po prawej kolejne obrazy miary jednorodnej na całym kwadracie jednostkowym, po lewej – nośniki tych miar. Już szósta iteracji miary jednorodnej przez operator Markowa stanowi dobre przybliżenie miary niezmienniczej.

Naszukowana teoria iterowanych układów odwzorowań jest wciąż przedmiotem badań matematycznych, dotyczących głównie istnienia przyciągających miar niezmienniczych. Iterowane układy odwzorowań mogą być też użyteczne przy obliczaniu całek po miarach fraktalnych [7]: całka po mierze μ_* , która jest przyciągającą miarą niezmienniczą pewnego IFS-u, jest równa granicy ciągu całek po miarach ν_n , gdzie ν_0 jest dowolną miarą (gęstością) początkową, a kolejne miary są zadane przez operator Markowa, $\nu_n = M^n[\nu_0]$. Ta metoda umożliwia analityczne obliczenia entropii dynamicznej dla wybranych układów jednowymiarowych [11].

Z punktu widzenia fizyka IFS stanowi ciekawy model dynamiczny, w którym występują elementy deterministyczne i stochastyczne. Takie podejście służyć może np. statystycznemu opisowi badanego układu, przy założeniu, że okresowe oddziaływanie z otoczeniem włączane jest w sposób losowy. Formalizm IFS, uogólniony na grunt mechaniki kwantowej [12], może być wykorzystany do analizy pewnej klasy otwartych układów kwantowych.

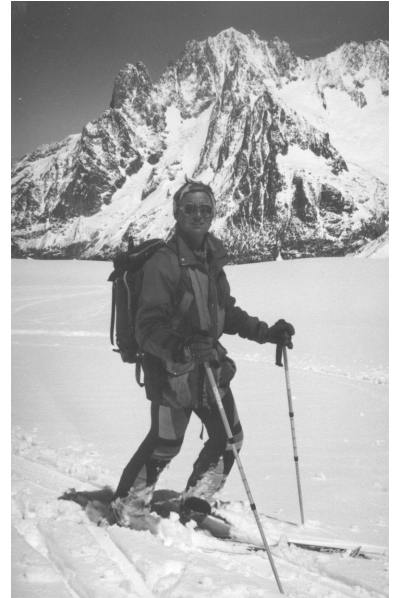
Literatura

- [1] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge 1995).
- [2] H.G. Schuster, *Chaos deterministyczny* (PWN, Warszawa 1993).
- [3] E. Ott, *Chaos w układach deterministycznych* (WNT, Warszawa 1997).
- [4] G.L. Baker, J.P. Gollub, *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych* (PWN, Warszawa 1998).
- [5] R. Dorfman, *Wprowadzenie do teorii chaosu* (PWN, Warszawa 2001).
- [6] A. Lasota, M. Mackey, *Chaos, Fractals and Noise* (Springer, Berlin 1994).
- [7] W. Słomczyński, J. Kwapien, K. Życzkowski, „Entropy computing via integration over fractal measures”, *Chaos* **10**, 180 (2000); arxiv.org/abs/chao-dyn/9804006.
- [8] M. Barnsley, *Fractals Everywhere* (Academic Press, San Diego 1988).
- [9] P. Pierański, *Fraktale: od geometrii do sztuki* (Ośrodek Wydawnictw Naukowych, Poznań 1992).
- [10] K. Życzkowski, A. Łoziński, „Euroattractor: a brief introduction to Iterated Function Systems”, arxiv.org/abs/nlin.CD/0210071.
- [11] W. Słomczyński, „From quantum entropy to iterated function systems”, *Chaos, Solitons & Fractals* **8**, 1861 (1997).
- [12] A. Łoziński, K. Życzkowski, W. Słomczyński, „Quantum Iterated Function Systems”, arxiv.org/abs/quant-ph/0210029; *Phys. Rev. E* (2003), w druku.

² Patrząc na zmiany polityczne zachodzące ostatnio w Europie, można się zastanawiać, czy Unia Europejska stanie się globalnym atraktorem przyciągającym wszystkie kraje naszego kontynentu?



ARTUR ŁOZIŃSKI, rocznik 1975, wielunianin z pochodzenia. Obecnie kończy doktorat w Instytucie Fizyki UJ. Jego zainteresowania naukowe to kwantowy chaos, teoria kwantowych układów otwartych, a także splątanie kwantowe. Poza fizyką interesuje się przede wszystkim literaturą. Tak jak Borges uważa, że powodem do chwały są głównie książki, które się przeczytało, a nie te, które się napisało, wobec czego czyta, a nie pisze.



Dr hab. KAROL ŻYCZKOWSKI, urodzony w 1960 r. w Krakowie, habilitacja z fizyki teoretycznej na Uniwersytecie Jagiellońskim w roku 1994. Prowadzi badania w dziedzinie układów nieliniowych, kwantowego chaosu, splątania kwantowego, a także podstaw teorii informacji kwantowej. Był stypendystą Fundacji Humboldta (Essen, 1990) oraz Fulbrighta (University of Maryland, 1997), pracuje w Instytucie Fizyki UJ w Krakowie oraz w Centrum Fizyki Teoretycznej PAN w Warszawie. Zainteresowania: historia, polityka, sport, w szczególności narciarstwo wysokogórskie.