Navigare necesse est

Roman Werpachowski

CFT PAN

22 września 2007

O czym będzie?

1) Po co nam nawigacja?
2) Nawigacja na sferze
3) Znajdowanie drogi na lądzie: grafy

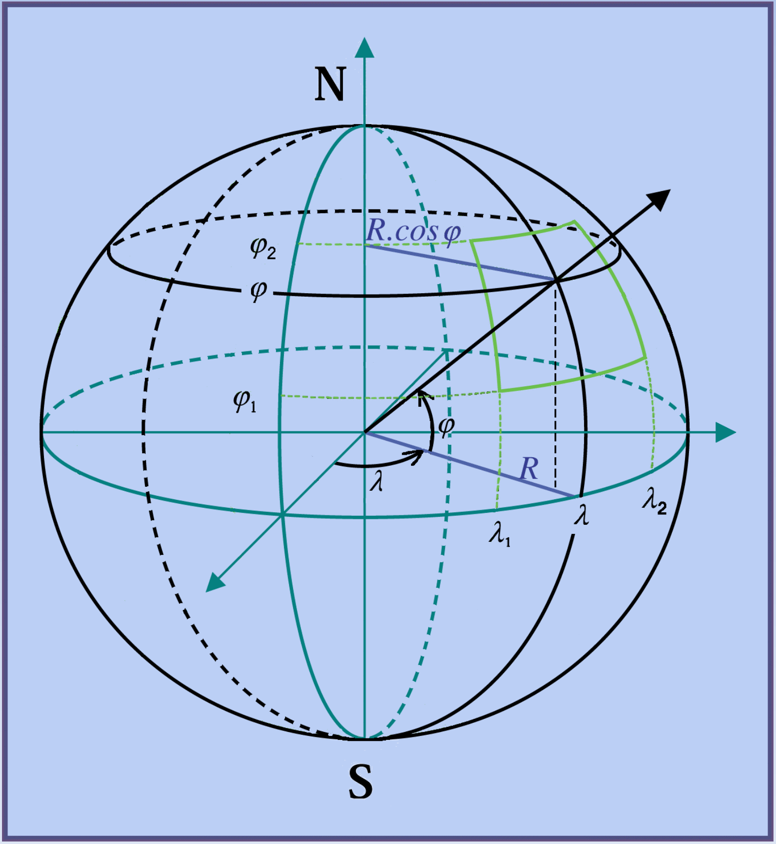
Zaczniemy od nawigacji, ale pożeglujemy dalej...

Po co nam nawigacja?

- Morze:
  - 96% towarów wg masy
  - 7,1 mld ton w 2005
- Powietrze:
  - 2 mld pasażerów w 2005
  - 40% towarów wg wartości
  - Ważny jest termin dostawy
- Jak znaleźć optymalną trasę w przestworzach nieba i oceanów?
- Samochody: nawigacja po sieci dróg

NAWIGACJA NA SFERZE

Model kuli ziemskiej

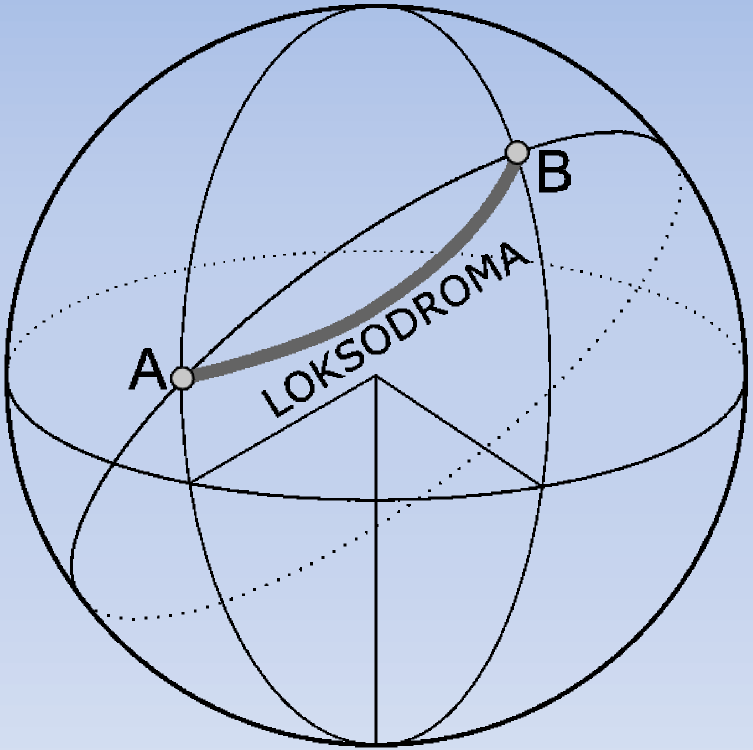


Najkrótsza droga na sferze

- Łatwa dla nawigatora: **loksodroma**
- Liniowa zależność *Sz(Dł)*
- Niestety, nie jest to najkrótsza droga...

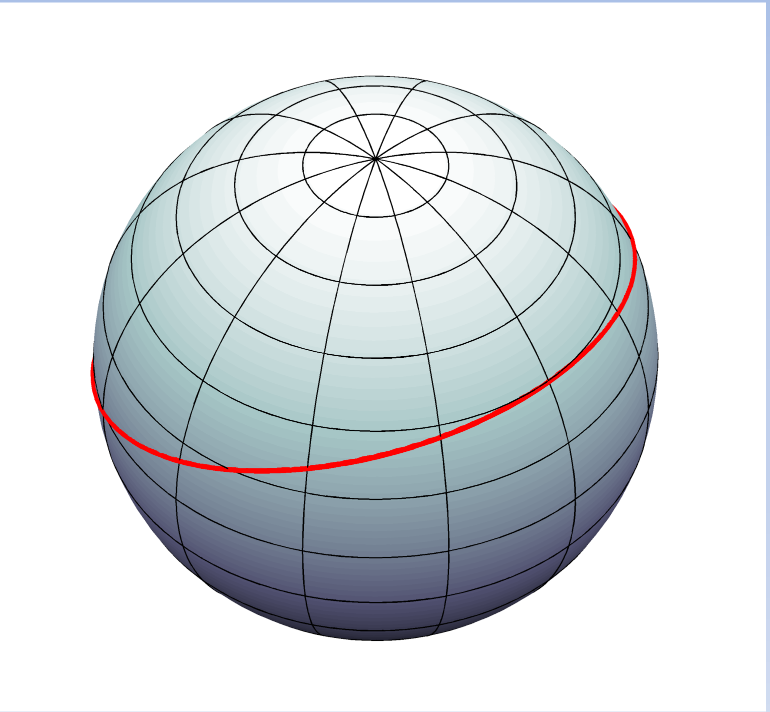
- Najkrótsza droga: **ortodroma** (wycinek wielkiego koła)
- Skomplikowana zależność *Sz(Dł)*

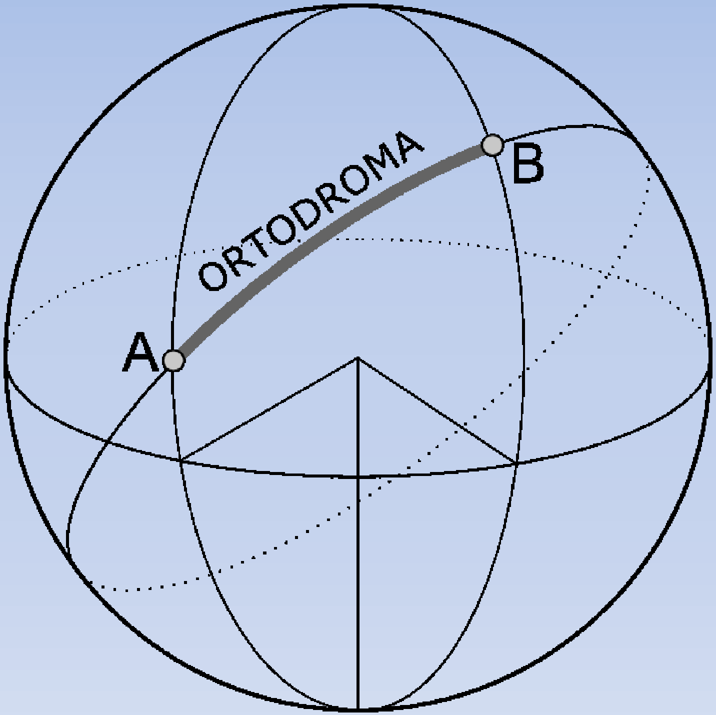
Loksodroma



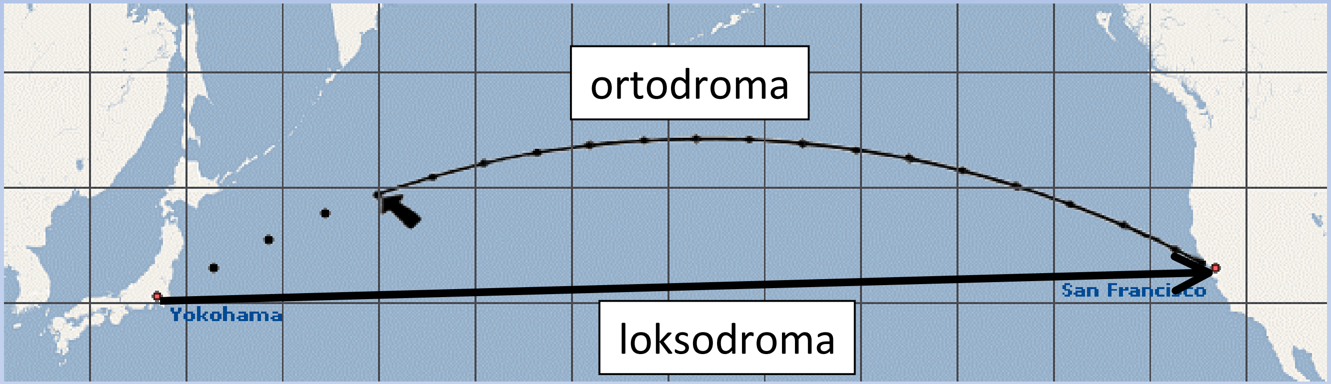
$$Sz = A + Dł * B$$

Ortodroma





Ortodroma



Mapa w rzucie Merkatora

$$D = \arccos(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \Delta\lambda \cos\varphi_1 \cos\varphi_2)$$

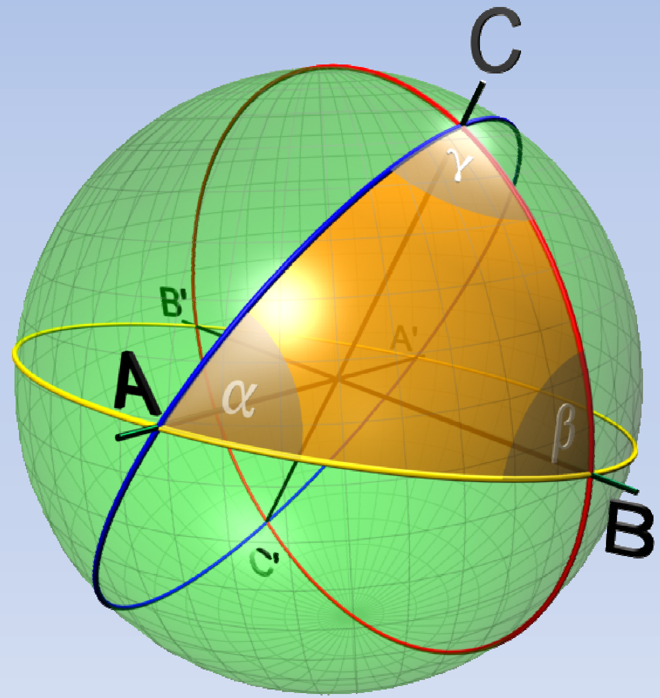
Geometria różniczkowa

- Nawigacja na sferze to problem geometryczny na przestrzeni **zakrzywionej**
- Ortodroma to **geodezyjna**: krzywa o najmniejszej długości
- Ogólna teoria względności: obiekt swobodnie spadający porusza się po geodezyjnej
- Nawigacja statkiem: szukamy „krzywej swobodnego spadku”, żeby oszczędzić czas i paliwo

W praktyce

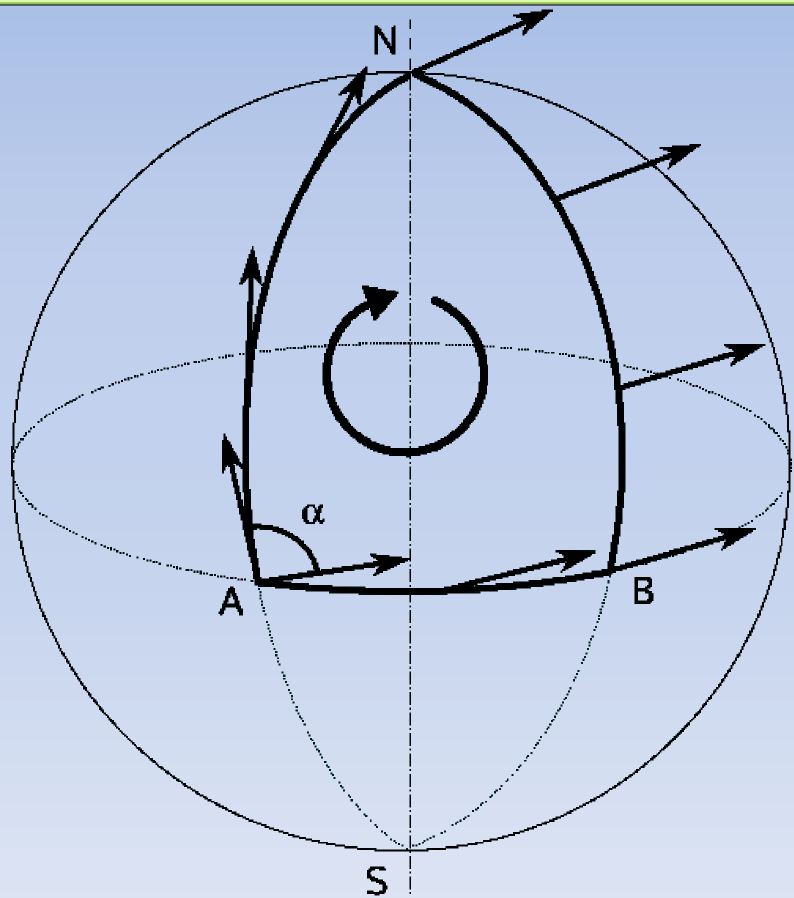
- Ortodroma: skomplikowana trygonometria
- Żeglarze poruszali się po łamanej złożonej z loksodrom
- Rozwój tablic trygonometrycznych dla nawigacji
- Komputery upraszczają sprawę

Trójkąt na sferze



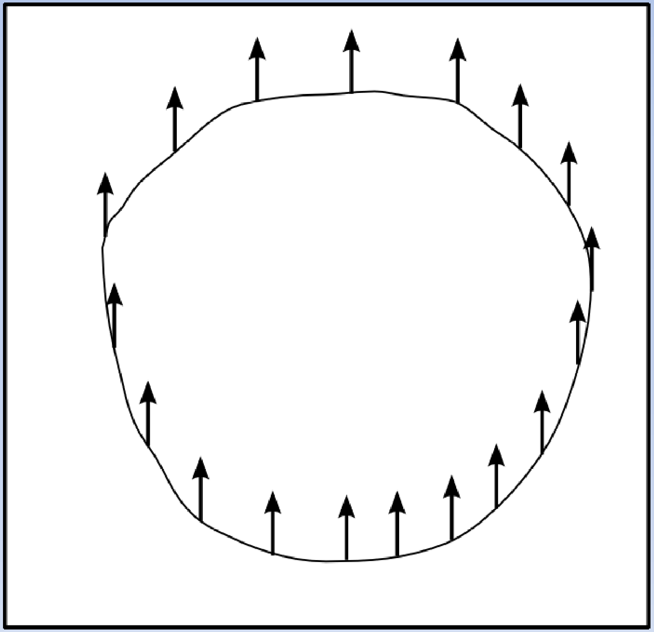
$180^o \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 540^o$

Transport równoległy na sferze



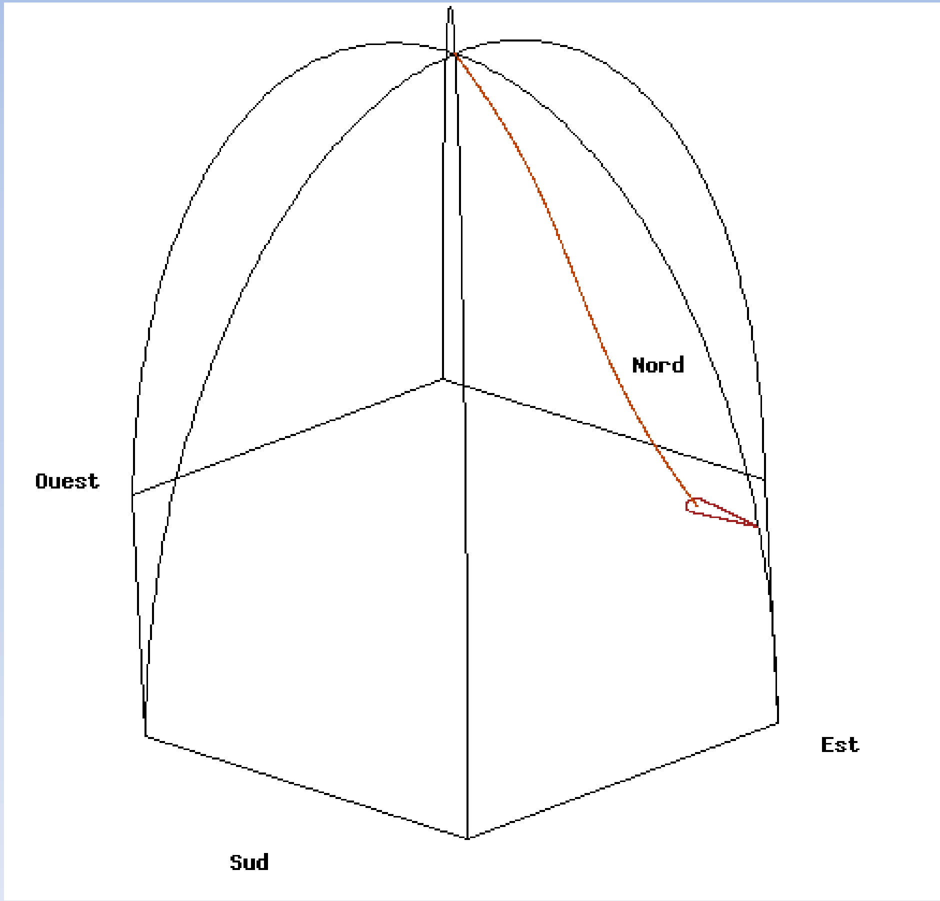
$\alpha \neq 0$: anholonomia

Transport równoległy na płaszczyźnie



$\alpha = 0$

Wahadło Foucault



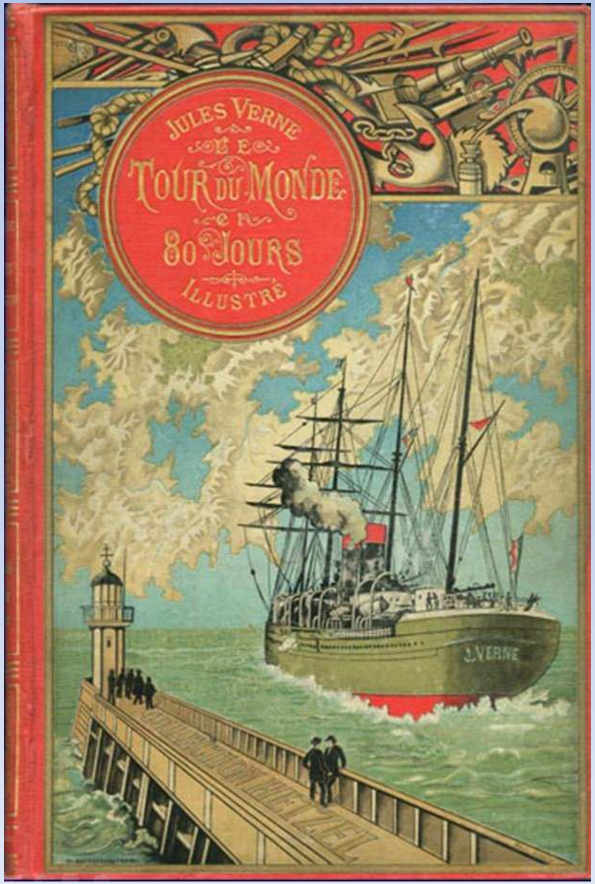
Moment pędu wahadła Foucault podlega transportowi równoległemu wraz z dobowym obrotem Ziemi.

Kąt Hannaya

- W ciągu doby płaszczyzna obrotu wahadła odchyla się o kąt $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$, gdzie
  $\pi/2 - \theta$ to szerokość geograficzna
- Kąt Ω to **kąt Hannaya** (anholonomia w mechanice klasycznej)
- Wahadło Foucault będzie można obejrzeć w **Centrum Nauki Kopernik**

Transport równoległy kalendarza

W powieście Verne'a „W osiemdziesiąt dni dookoła świata", bohater Phileas Fogg zyskuje jeden dzień w podróży dzięki temu, że podróżuje na *wschód* a nie na *zachód*.



Transport równoległy kalendarza

Dokonuje tego niezwykłego czynu dzięki *linii zmiany daty*.
Mamy tu do czynienia z anholonomią transportu równoległego kalendarza pana Fogga ;-)

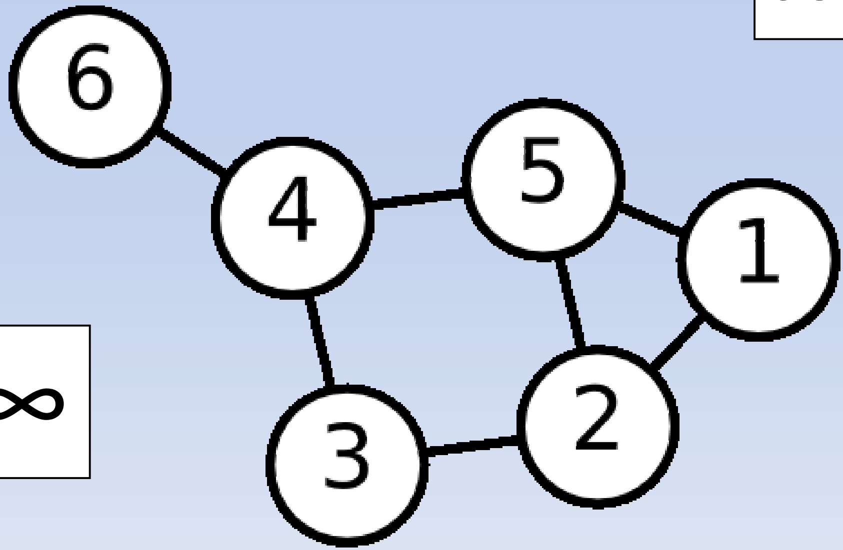
Jednakże, Verne dopuścił się pewnego błędu w swojej powieści...

GRAFY, CZYLI JAZDA AUTEM

Model sieci drogowej

K(i,j) := koszt przejazdu od węzła *i* do **sąsiedniego** węzła *j*

$K(i,i)=0$



$K(1,4)=\infty$

Szukanie optymalnej trasy

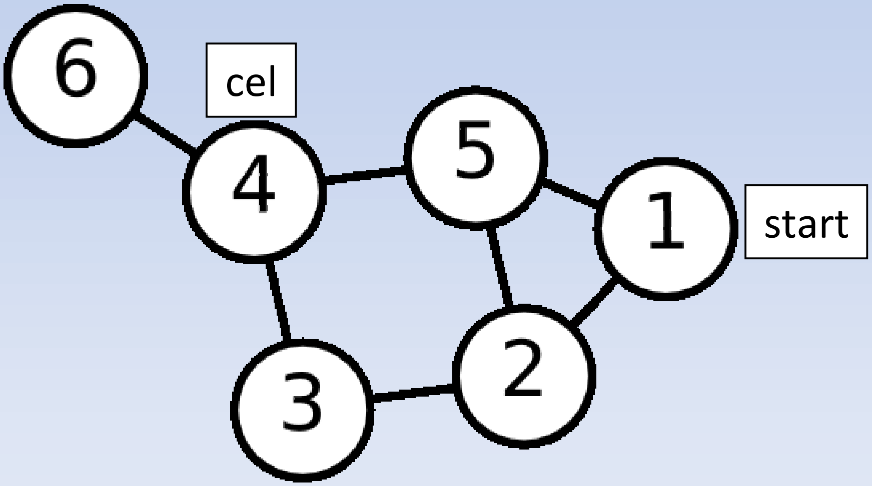
- Funkcja kosztu przejazdu od A do B :
  - Czas
  - Odległość (niepraktyczne!)
  - Zużycie paliwa
- Optymalna trasa: suma kosztów jak najniższa
- (Niektóre) metody wyznaczania takiej trasy:
  - algorytm Floyda-Warshalla
  - zgadywanie dobrej trasy (alg. **heurystyczne**)

Algorytm Floyda-Warshalla

- Optymalną trasę budujemy metodą kolejnych przybliżeń
- Przybliżenie rzędu *k*: trasa optymalna spośród zawierających tylko węzły od 1 do *k*
- Znając przybliżenie rzędu *k*, można obliczyć przybliżenie rzędu *k* + 1: **rekurencja**
- Przybliżenie dla *k* = 0: krawędź grafu/brak trasy

Wyznaczanie optymalnej trasy

Po dodaniu nowego węzła *k*, optymalna trasa z *i* do *j* nie zmieni się, albo stanie się trasą zawierającą nowy węzeł *k*, czyli sumą **znanych** już optymalnych tras z *i* do *k* i *k* do *j*



Schemat algorytmu F-W

1. Znamy trasy $T(i',j',k\text{-}1)$ dla **wszystkich** par (i',j')
2. A = koszt $T(i,j,k\text{-}1)$ oraz
   B = koszt $T(i,k,k\text{-}1)$ + koszt $T(k,j,k\text{-}1)$
3. Jeżeli B < A, to

$$\boxed{T(i,j,k) = T(i,k,k\text{-}1)+T(k,j,k\text{-}1)}$$

   w przeciwnym wypadku

$$\boxed{T(i,j,k)=T(i,j,k\text{-}1)}$$

Algorytmy heurystyczne

- Czy z Warszawy do Katowic jedzie się przez Berlin?
- Algorytm F-W nie ma „zdrowego rozsądku”
- Rozwiązanie: algorytmy heurystyczne (np. A*)
- Rozpatrujemy trasy, które **wydają się** prowadzić w dobrym kierunku
- Pytanie: czy trasa *T(i,k)* z *i* do *k* może być początkiem optymalnej trasy z *i* do *j*?
- Oszacowanie *T(i,k)* = koszt przejazdu z *i* do *k* + oszacowanie kosztów przejazdu z *k* do *j*
- Software do GPS korzysta z algorytmów heurystycznych

Podsumowanie

- Warto znać geometrię różniczkową, kiedy się jest żeglarzem
- W przestrzeniach zakrzywionych życie wygląda inaczej
- Komputerowa nawigacja to niezwykle ciekawy problem algorytmiczny

Źródła grafik

- Wikipedia
- http://www.sailing.compnet.com.pl